中国科学 : 数学　2025 年　第 55 卷　第 ? 期 : 1 ～ 32
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

量子人工智能的拓扑斯理论形式

陈泽乾[1*], 丁立新[2], 刘红美[3], 余旌胡[4]

1. 中国科学院精密测量科学与技术创新研究院, 武汉 430071;
2. 武汉大学计算机学院, 武汉 430072;
3. 三峡大学理学院数学系, 宜昌 443002;
4. 武汉理工大学数学与统计学院, 武汉 430070

E-mail: zqchen@apm.ac.cn, lxding@whu.edu.cn, liuhm@ctgu.edu.cn, jhyu@whut.edu.cn

收稿日期: 2024-04-23; 接受日期: 2024-11-30; 网络出版日期: 2025-02-07; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11871468) 和国家社会科学基金重大项目 "虚拟现实媒介叙事研究" (批准号: 21&ZD326) 资助项目

摘要　依据 ′t Hooft 在 2016 年提出的关于量子态叠加原理的新诠释, 本文运用拓扑斯理论研究量子人工智能的数学基础. 首先, 根据图灵测试对智能给出的科学定义, 将人工智能系统定义为由拓扑斯理论所描述的物理系统 (Isham 等在 2008 年建立的物理理论), 它们具有自身的高阶形式语言及逻辑推理系统. 其次, 依据物理原理, 将人工智能系统分为经典人工智能系统和量子人工智能系统. 对于经典人工智能系统, 用测度论构造相应的拓扑斯描述, 特别是给出了深度学习的拓扑斯描述; 而对于量子人工智能系统, 则用 Hilbert 空间上算子理论构造相应的拓扑斯以给出它的数学描述. 最后, 给出量子神经网络的拓扑斯理论模型.

关键词　图灵思考机器　′t Hooft 态叠加原理　量子人工智能　拓扑斯理论　算子理论　量子神经网络

MSC (2020) 主题分类　68T27, 81P10, 46L53

1　引言

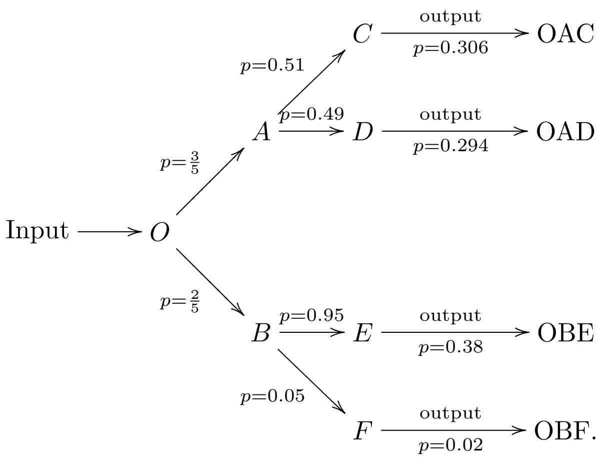
Turing [27] 在 1950 年提出了 "思考机器" (thinking machine) 的概念, 该概念包含 "机器" 和 "思考" 两个方面的含义. Turing 指出, 他所描述的 "能够思考的机器" (a machine that can think) 是指计算机, 即在数学上定义为图灵机 (Turing machine). 但是, 他没有给出 "思考" 的数学定义, 而是对 "思考" 给出了一个称之为 "模拟游戏" (imitation game) 的判别法, 即 "图灵测试" (Turing test). 在他所设计的 "图灵测试" 中, 测试者不知道两个被测试对象谁是机器谁是人, 通过向二者提出一组问题, 如果从二者的回答结果中测试者不能区分哪个是机器哪个是人, 则可以认为机器能够 "思考" . 为此, Turing 进一步指出, 一个机器能够思考的前提是它首先需要学习以获得足够的 "知识" , 并由此研究了对机器进行训练的问题. 这就是 "机器学习" 的概念. 因此, 根据 Turing 的思想, 人工智能包含 "思考机器" 和 "机器学习" 两个基本概念, 它们是人工智能理论研究的基本内容.

英文引用格式: Chen Z Q, Ding L X, Liu H M, et al. A topos-theoretic formalism of quantum artificial intelligence (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 1–32, doi: 10.1360/SSM-2024-0126

© 2025《中国科学》杂志社　

当前, 芯片是采用量子技术 (基于量子电动力学的物理技术) 制造的, 这表明在硬件层面上人工智能已经进入量子人工智能时代. 因此, 研究量子人工智能的理论基础势在必行. 文献 [5] 研究了图灵思考机器必须遵循的物理原理, 阐述了量子理论中的态叠加原理是机器能够 "思考" 的物理基础, 即图灵思考机器是一个量子机器 (不等同于量子计算机, 因为量子计算机需要大规模多体量子叠加才能实现). 但是, 这个态叠加原理并不是传统量子力学中 Dirac 所描述的态叠加原理 (参见文献 [6]), 而是荷兰物理学家 ′t Hooft [26] 在 2016 年提出的关于量子态叠加原理的新诠释. ′t Hooft 指出, 一个量子态 ψ 代表物理系统的总体信息, 它是否为物理态或叠加态需要考虑一个物理量 Q 才有物理意义, 此时 Q 的每个本征态 ψ_k 是该物理量的物理态, 这些量子态全体 $\{\psi_k\}$ 构成相应的 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 中的一个正交基; 如果 $\psi = \sum_k a_i\psi_k$ (表示是唯一的) 且至少有两个系数 a_k 不为 0, 则 ψ 是 Q 的叠加态, 但不是 Q 的物理态, 其物理意义是表示叠加中出现的物理态 ψ_k 之间的量子关联, 即发现该系统处于物理态 ψ_k 的概率是 $|a_k|^2$. 由此可知, 尽管二者用 Hilbert 空间理论所描述的数学形式相同, 但是 ′t Hooft 态叠加原理与 Dirac 态叠加原理的物理意义是有实质性差别的, 它可以用来给出机器能否思考的物理基础.

下面用一个例子说明 ′t Hooft 态叠加原理如何支配机器思考, 这是一个简单的 Hopfield 模型:



首先, 转移概率 $p_{\mathrm{OA}} = 3/5$ 和 $p_{\mathrm{OB}} = 2/5$ 等依赖于对机器的预先训练, 不同的训练会给出不同的转移概率, 这些概率值代表机器具有的 "知识". 其次, 从 O 到 A 或 B 有两种转移概率形式, 一种是经典演化形式

$$|O\rangle\langle O| \longrightarrow \frac{3}{5}|A\rangle\langle A| + \frac{2}{5}|B\rangle\langle B|, \tag{1.1}$$

此时, 事件 OA 要发生, 这是因为经典机器按照频率方式执行概率指令; 另一种是量子演化形式

$$|O\rangle \longrightarrow \sqrt{\frac{3}{5}}|A\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}|B\rangle, \tag{1.2}$$

依据 ′t Hooft 态叠加原理, $|O\rangle$ 产生量子态 $|A\rangle$ 和 $|B\rangle$ 的量子关联, 此时事件 OA 和 OB 处于叠加态, 不能确定哪一个会发生. 同理, 从 A 到 C 或 D 和从 B 到 E 或 F 都有两种演化方式, 一种是经典转移方式, 此时有一个事件发生; 另一种是量子转移方式, 此时不能确定哪一个事件会发生. 第三, 如果这是经典机器执行的, 最后可以确定事件 OAC 发生, 而事件 OAB, OBE 和 OBF 不会发生; 如果是量子机器, 4 个事件 OAC, OAB, OBE 和 OBF 中有一个且仅一个发生, 它们发生的概率分别是 $p_{\mathrm{OAC}} = 0.306$, $p_{\mathrm{OAD}} = 0.294$, $p_{\mathrm{OBE}} = 0.38$ 和 $p_{\mathrm{OBF}} = 0.02$, 但是究竟哪一个会发生是不确定的和不可

控制的, 它是机器 “思考” 的结果, 即编码数据的物理态之间的量子关联效应. 因此, 我们看到, 一方面, 在经典机器情形, 只有一个事件发生, 是确定的, 因为经典机器是按照频率方式执行概率指令的; 而在量子机器情形, 4 个事件都有可能发生, 是不确定的, 因为量子机器是遵循 ′t Hooft 态叠加原理执行概率指令的. 另一方面, 事件 OBE 发生的概率 $p_{\mathrm{OBE}} = 0.38$ 高于事件 OAC 发生的概率 $p_{\mathrm{OAC}} = 0.306$, 但是事件 OBE 在经典机器情形是不会发生的, 只有在量子机器情形即机器能够思考的情形下才会发生, 这说明了能够思考的量子机器比经典机器 “聪明”.

基于上述运用 ′t Hooft 态叠加原理对图灵思考机器的分析和理解, 我们可以为人工智能建立一个数学基础. 为此, 首先要从数学上理解智能的含义. 从 Turing 所设计的 “图灵测试” 中可以看出, 能够思考的机器必须具备两个基本要素: 一个是它需要一种语言来理解测试者所提出的问题, 另一个是它要具备对问题的逻辑推理能力, 事实上二者是密不可分的. 一般而言, 语言包含语法和语义两个部分. 在数理逻辑中, 语法是构成语句的规则, 而语义则是赋予语句真假值. 一种语言能够用于问题的理解和推理的前提是在其中要构建一个逻辑推理系统. 由此可知, 人工智能的基本要素是机器的思考, 它在数学上可以理解为一种形式语言的逻辑推理系统, 即在数学上人工智能系统可以定义为一种形式语言连同它的一个逻辑推理系统.

由上述分析可知, 为了建立人工智能的数学基础, 需要一种数学理论, 它既能描述形式语言及其逻辑推理系统又能描述物理理论. 我们认为, 这个数学理论就是 Grothendieck 等数学家在 20 世纪 60 年代建立的拓扑斯理论 (topos theory, 参见文献 [19]). 这是因为, 一方面, 拓扑斯理论已经用于形式语言及其逻辑推理系统的研究 (参见文献 [13, 17]); 另一方面, Isham 等物理学家在 2008 年已运用拓扑斯理论为物理学建立了一个理论基础 (参见文献 [7–11]). 因此, 结合 ′t Hooft 态叠加原理作为量子人工智能的基本原理, 本文将用拓扑斯理论为量子人工智能建立一个数学基础.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节给出预备知识, 包括拓扑斯理论和 Hilbert 空间上的算子理论等内容. 第 3 节首先给出智能系统的高阶形式语言的定义以及拓扑斯的内在语言, 即 Mitchell-Bénabou 语言; 其次引进人工智能系统的数学定义, 并说明经典人工智能系统与量子人工智能系统的差别; 最后研究深度学习在经典人工智能系统中的表示形式. 第 4 节引进量子人工智能系统的数学模型, 它是量子测量全体 $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 上的预层范畴 $\mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}}}$, 随后给出量子人工智能系统的输入对象的构造和性质. 第 5 节给出量子人工智能系统的输出对象的构造和性质以及自伴算子在 $\mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}}}$ 中的表示. 第 6 节研究量子人工智能系统的变换问题, 给出酉算子在 $\mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}}}$ 中的表示和性质. 最后, 第 7 节用量子人工智能的拓扑斯理论给出量子态的表示, 并由此给出量子神经网络的拓扑斯理论模型.

2 预备知识

本节简要介绍一些相关的基础知识与记号和术语, 包括拓扑斯理论和谱算子理论等内容.

2.1 拓扑斯

拓扑斯是满足一定性质的范畴 (参见文献 [19]). 为了引进拓扑斯, 首先回顾范畴理论中的一些基本概念, 如终端对象、对象的乘积、指数和子对象分类子等 (参见文献 [13, 18]).

设 $\mathfrak{C}$ 是一个范畴, 用 $\mathfrak{C}_0$ 表示它的对象类, 即 $\mathfrak{C}$ 的对象 A 记作 $A \in \mathfrak{C}_0$. 一个对象 $1 \in \mathfrak{C}_0$ 称为终端对象 (terminal object), 如果对每个对象 $A \in \mathfrak{C}_0$ 都存在唯一一个态射 $! : A \longrightarrow 1$, 记作 $1_A : A \longrightarrow 1$; 而每个态射 $f : 1 \longrightarrow A$ 称为 A 的一个全局元 (global element), 用 ΓA 表示 A 的全局元全体.

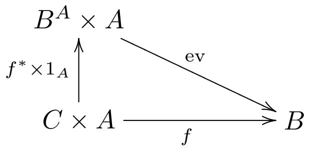
两个对象 $A, B \in \mathfrak{C}_0$ 的乘积定义为一个对象 $A \times B \in \mathfrak{C}_0$ 连同一对态射 $\mathrm{pr}_{A,B} : A \times B \longrightarrow A$ 和 $\mathrm{pr}'_{A,B} : A \times B \longrightarrow B$ 使得对任意一对态射 $f : C \longrightarrow A$ 和 $g : C \longrightarrow B$, 都存在唯一一个态射 $\langle f, g \rangle : C \longrightarrow A \times B$ 满足条件:

$$\mathrm{pr}_{A,B} \circ \langle f, g \rangle = f, \quad \mathrm{pr}'_{A,B} \circ \langle f, g \rangle = g.$$

此时, $\mathrm{pr}_{A,B}$ 和 $\mathrm{pr}'_{A,B}$ 分别称为到 A 上和到 B 上的投影, 而 $\langle f, g \rangle$ 称为 f 和 g 关于投影 $\mathrm{pr}_{A,B}$ 和 $\mathrm{pr}'_{A,B}$ 的乘积.

范畴 $\mathfrak{C}$ 中两个态射 $f : A \longrightarrow C$ 和 $g : B \longrightarrow C$ 的拉回定义为一个对象 D 连同一对态射 $g' : D \longrightarrow A$ 和 $f' : D \longrightarrow B$ 满足条件: (i) $g \circ f' = f \circ g'$; (ii) 当任意一对态射 $h : E \longrightarrow A$ 和 $k : E \longrightarrow B$ 使得 $g \circ k = f \circ h$ 时, 都存在唯一一个态射 $\delta : E \longrightarrow D$ 使得 $h = g' \circ \delta$ 且 $k = f' \circ \delta$. 此时, f' 称为 f 沿 g 的拉回, g' 称为 g 沿 f 的拉回; 而 D 称为 A 与 B 的纤维积 (fibered product), 记作 $D = A \times_C B$.

定义 2.1 [13] 设范畴 $\mathfrak{C}$ 中任意两个对象都具有乘积. 对于范畴 $\mathfrak{C}$ 中两个对象 A 和 B, 如果存在一个对象 B^A 和一个态射 $\mathrm{ev} : B^A \times A \longrightarrow B$ 使得对任意一个对象 C 和任意一个态射 $f : C \times A \longrightarrow B$, 都存在唯一态射 $f^* : C \longrightarrow B^A$ 满足 $f = \mathrm{ev} \circ (\hat{f} \times 1_A)$, 即图形



是交换的, 则称 A 与 B 具有指数 (exponentiation) B^A, 而 $\mathrm{ev} : B^A \times A \longrightarrow B$ 称为赋值态射. 如果 $\mathfrak{C}$ 中任意两个对象都具有指数, 则称范畴 $\mathfrak{C}$ 具有指数.

注 2.1 此时, 映射 $f \mapsto f^*$ 是从 $\mathrm{Hom}(C \times A, B)$ 到 $\mathrm{Hom}(C, B^A)$ 的 1-1 双射, 而 f 和 f^* 互相称为对方的指数伴随 (exponential adjoint).

给定范畴 $\mathfrak{C}$ 的一个对象 D, 则任意一个单态射 $f : A \rightarrowtail D$ 都称为 D 的一个子对象. 对于 D 的两个子对象 $f : A \rightarrowtail D$ 和 $g : B \rightarrowtail D$, 如果存在一个态射 $h : A \longrightarrow B$ 使得 $f = g \circ h$, 则记作 $f \leqslant g$. 此时 h 必定是一个单态射. 关系 $\leqslant$ 满足如下性质: (i) 自反性, 即 $f \leqslant f$; (ii) 传递性, 即当 $f \leqslant g$ 且 $g \leqslant h$ 时有 $f \leqslant h$; (iii) 等价性, 即当 $f \leqslant g$ 且 $g \leqslant f$ 时 $f \simeq g$ (即如果 $f : A \rightarrowtail D$ 和 $g : B \rightarrowtail D$, 则存在一个同构 $h : A \longrightarrow B$ 使得 $f = g \circ h$). 令

$$[f] = \{g : g \simeq f\},$$

则 $[f] \subseteq [g]$ 当且仅当 $f \leqslant g$, 从而 $[f] = [g]$ 当且仅当 $f \simeq g$. 用 $\mathrm{Sub}(D)$ 表示 D 的子对象类全体, 即

$$\mathrm{Sub}(D) = \{[f] \mid f : A \rightarrowtail D, A \in \mathfrak{C}_0\},$$

它称为 D 的子对象集.

下面是子对象分类子的定义.

定义 2.2 [13] 设范畴 $\mathfrak{C}$ 具有终端对象 1. $\mathfrak{C}$ 的一个子对象分类子 (subobject classifier) 定义为一个对象 Ω 连同一个态射 $\top : 1 \longrightarrow \Omega$, 满足如下 Ω- 公理: 对任意一个单态射 $f : A \rightarrowtail D$ 都存在唯一一

个态射 $\chi_f : D \longrightarrow \Omega$ 使得图形

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ f\ } & D \\ {\scriptstyle 1_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi_f} \\ 1 & \xrightarrow{\ \top\ } & \Omega \end{array}$$

是一个拉回四边形, 即 f 是 $\top$ 沿 χ_f 的拉回, 1_A 是 χ_f 沿 $\top$ 的拉回使得 $A = 1 \times_\Omega D$. 子对象分类子记作 $\top : 1 \longrightarrow \Omega$, 也简称 Ω 为子对象分类子.

注 2.2 (1) 子对象分类子 Ω 在同构意义下是唯一的, 即如果 $\top' : 1 \longrightarrow \Omega'$ 是另一个分类子, 则 $\Omega \cong \Omega'$.

(2) 态射 $\chi_f : D \longrightarrow \Omega$ 称为 D 的子对象 $f : A \rightarrowtail D$ 的特征 (character) 或特征态射 (characteristic morphism).

(3) 特征 $\chi_f : D \longrightarrow \Omega$ 仅依赖于 $[f]$, 即如果 $f \simeq g$, 则 $\chi_f = \chi_g$, 反之亦然. 也就是说, 特征态射 $\chi_{[f]} : D \longrightarrow \Omega$ 全体与 D 的子对象集 $\mathrm{Sub}(D)$ 是 1-1 对应的.

(4) 给定对象 $A \in \mathfrak{C}_0$, 如果指数 Ω^A 存在, 则它称为 A 的幂对象 (power object), 记作 PA.

下面是拓扑斯的定义.

定义 2.3 (参见文献 [19, IV.1]) 范畴 $\mathfrak{C}$ 称为一个基本拓扑斯 (elementary topos), 如果

(1) $\mathfrak{C}$ 中每对态射 $f : A \longrightarrow C$ 和 $g : B \longrightarrow C$ 都具有拉回;

(2) $\mathfrak{C}$ 具有一个终端对象 1;

(3) $\mathfrak{C}$ 具有一个子对象分类子 Ω;

(4) $\mathfrak{C}$ 中每个对象 A 的幂对象 PA 存在, 即 A 与 Ω 具有指数 $PA = \Omega^A$.

通常基本拓扑斯简称为拓扑斯, 记作 $\mathfrak{T}(1, \Omega)$ 或 $\mathfrak{T}$.

注 2.3 (1) 集合范畴 **Sets** 和有限集合范畴 **Finsets** 都是拓扑斯.

(2) 每个拓扑斯都具有指数 (参见文献 [19, 定理 IV.2.1]).

(3) 拓扑斯的每个对象 A 的子对象集 $\mathrm{Sub}(A)$ 形成一个 Heyting 代数 (参见文献 [19, 定理 IV.8.1]).

一类重要的拓扑斯是预层范畴. 设 $\mathfrak{C}$ 是一个局部小范畴. $\mathfrak{C}$ 上的预层 (presheaf) 是从 $\mathfrak{C}$ 到 **Sets** 的反变函子 $\underline{X}$, 即

(1) 对每个 $A \in \mathfrak{C}_0$, $\underline{X}(A)$ 是一个集合;

(2) 对每个 $\mathfrak{C}$ 中的态射 $f : A \longrightarrow B$, $\underline{X}(f) : \underline{X}(B) \mapsto \underline{X}(A)$ 是一个集合映射, 满足如下结合律: 如果 $f : A \longrightarrow B$ 且 $g : B \longrightarrow C$, 则 $\underline{X}(g \circ f) : \underline{X}(C) \mapsto \underline{X}(A)$ 使得

$$\underline{X}(g \circ f) = \underline{X}(f) \circ \underline{X}(g),$$

即 $\underline{X}$ 是从 $\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}$ 到 **Sets** 的函子 $\underline{X} : \mathfrak{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$. 从 $\mathfrak{C}$ 上预层 $\underline{X}$ 到预层 $\underline{Y}$ 的态射 $\underline{\mathbb{F}} : \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ 定义为一个自然变换 (一族映射)

$$\underline{\mathbb{F}} = \{\alpha_C \in \mathrm{Hom}(\underline{X}(C), \underline{Y}(C)) \mid C \in \mathfrak{C}_0\},$$

使得如果 $f : A \longrightarrow B$, 则 $\alpha_A \circ \underline{X}(f) = \underline{Y}(f) \circ \alpha_B$, 即图形

$$\begin{array}{ccc} \underline{X}(B) & \xrightarrow{\ \underline{X}(f)\ } & \underline{X}(A) \\ {\scriptstyle \alpha_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_A} \\ \underline{Y}(B) & \xrightarrow[\ \underline{Y}(f)\ ]{} & \underline{Y}(A) \end{array}$$

是交换的.

定义 2.4[19] 设 $\mathfrak{C}$ 是一个局部小范畴. 预层范畴 $\mathbf{Sets}^{\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}}$ 定义如下:

(1) 对象族为 $\mathfrak{C}$ 上的预层 $\underline{X}$ 全体;

(2) 对于任意两个对象 $\underline{X}$ 和 $\underline{Y}$, 态射族 $\mathrm{Hom}(\underline{X},\underline{Y})$ 是自然变换 $\underline{\mathbb{F}}:\underline{X}\longrightarrow\underline{Y}$ 全体;

(3) 对于任意对象 $\underline{X}$, 恒等态射 $1_{\underline{X}}:\underline{X}\longrightarrow\underline{X}$ 为从 $\underline{X}$ 到自身的一个自然变换

$$1_{\underline{X}}=\{\mathrm{id}_{\underline{X}(C)}\mid C\in\mathfrak{C}_0\},$$

其中 $\mathrm{id}_{\underline{X}(C)}$ 是集合 $\underline{X}(C)$ 上的恒等映射;

(4) 态射的复合运算按照自然变换的复合运算定义, 它满足结合律.

在预层范畴 $\mathbf{Sets}^{\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}}$ 上可以定义终端对象 1 和子对象分类子 Ω 使得 $\mathbf{Sets}^{\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}}$ 成为一个拓扑斯, 参见文献 [19].

2.2 算子理论

我们主要采用文献 [20–22] 中的定义和术语. 没有特别说明时, 用 $\mathbb{H}$ 表示一个 (无穷维可分) 复 Hilbert 空间, 为了方便使用 Dirac 记号, 假定其内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 关于第一个变量共轭线性、关于第二个变量线性, 即给定 $u,v\in\mathbb{H}$, 算子 $|u\rangle\langle v|$ 定义为 $(|u\rangle\langle v|)x=\langle v,x\rangle u$, $\forall\, x\in\mathbb{H}$, 且用 $|n\rangle$ 或 $|x\rangle$ 表示 $\mathbb{H}$ 中的单位向量或非零向量. 用 $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ 表示 $\mathbb{H}$ 上有界线性算子全体, $\mathcal{L}(\mathbb{H})_{\mathrm{sa}}$ 表示 $\mathbb{H}$ 上有界自伴算子全体, $\mathcal{U}(\mathbb{H})$ 表示 $\mathbb{H}$ 上酉算子全体, $\mathcal{P}(\mathbb{H})$ 表示 $\mathbb{H}$ 上正交投影算子全体, 它们都赋予算子范数拓扑. 没有特别说明时, 总是用 I 表示 $\mathbb{H}$ 上的恒等算子, 用 $\mathrm{Sp}(A)$ 表示算子 A 的谱集.

对于两个正交投影算子 $P,Q\in\mathcal{P}(\mathbb{H})$, 定义

(i) $\neg P=P^{\perp}=1-P$;

(ii) $P\wedge Q$ 为到 $P(\mathbb{H})\cap Q(\mathbb{H})$ 上的正交投影子;

(iii) $P\vee Q$ 为到 $P(\mathbb{H})\cup Q(\mathbb{H})$ 在 $\mathbb{H}$ 中生成的闭子空间 $\overline{\mathrm{span}}\{P(\mathbb{H})\cup Q(\mathbb{H})\}$ 上的正交投影算子.

当 P 与 Q 是可交换的正交投影算子时, $P\wedge Q=PQ$ 且

$$P\vee Q=P+Q-PQ.$$

此时, 如果 $P(\mathbb{H})\subset Q(\mathbb{H})$, 则称 P 小于 Q, 记作 $P\leqslant Q$. 小于关系 $\leqslant$ 是 $\mathcal{P}(\mathbb{H})$ 上的一个偏序使得 $(\mathcal{P}(\mathbb{H}),\leqslant)$ 是一个格, 称为量子逻辑, 但是它不满足分配律, 因此不是一个逻辑推理系统 (参见文献 [28]).

Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 上的一个完备测量 (单位正交分解) 是一列正交投影算子 $\mathbf{M}=\{M_n\}$, 满足如下性质:

$$M_nM_m=0,\quad\forall\, n\neq m;\quad\sum_n M_n=I.$$

用 $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 表示 $\mathbb{H}$ 上的完备测量全体, 在其上定义如下偏序: 对于任意两个完备测量 $\mathbf{M}=\{M_n\}$ 和 $\mathbf{K}=\{K_m\}$, 如果每个 $M_n\in\mathbf{M}$ 都等于 $\mathbf{K}$ 中若干个正交投影算子之和 (如果是无穷个正交投影算子, 则按强算子拓扑求和), 则称 $\mathbf{K}$ 是 $\mathbf{M}$ 的加细, 记作 $\mathbf{M}\leqslant\mathbf{K}$. 直接验证可知, 加细关系 $\leqslant$ 是 $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 上的一个偏序. 因此, $(\mathcal{M}(\mathbb{H}),\leqslant)$ 是一个偏序范畴, 仍记作 $\mathcal{M}(\mathbb{H})$.

对任意 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, 用 $\mathcal{V}(\mathbf{M})$ 表示由 $\mathbf{M}$ 在 $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ 中生成的交换 von Neumann 子代数. 令

$$\mathcal{V}(\mathbb{H})=\{\mathcal{V}(\mathbf{M})\mid\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})\},$$

则 $\mathcal{V}(\mathbb{H})$ 在包含关系下构成一个偏序范畴, 仍记作 $\mathcal{V}(\mathbb{H})$. 用 $\Xi(\mathcal{V}(\mathbf{M}))$ 表示 $\mathcal{V}(\mathbf{M})$ 的 Gel'fand 谱集, 即所有满足 $\lambda(I)=1$ 的乘法线性泛函 $\lambda:\mathcal{V}(\mathbf{M})\mapsto\mathbb{C}$ 构成的集合; $\Xi(\mathcal{V}(\mathbf{M}))$ 赋予弱 $*$ 拓扑是一个紧集.

对于任意 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, 用 $\mathcal{B}(\mathbf{M})$ 表示 $\mathcal{V}(\mathbf{M})$ 中所有正交投影算子的全体, 它是 $\mathcal{P}(\mathbb{H})$ 中的一个布尔子代数. 对于任意 $\mathbf{L},\mathbf{K}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, $\mathbf{L}\leqslant\mathbf{K}$ 当且仅当 $\mathcal{B}(\mathbf{L})\subseteq\mathcal{B}(\mathbf{K})$, 即 $\mathcal{B}(\mathbf{L})$ 是 $\mathcal{B}(\mathbf{K})$ 的布尔子代数. 用 $\mathbb{P}(\mathbf{M})$ 表示 $\mathcal{B}(\mathbf{M})$ 上概率测度 $\mathbf{P}$ 全体, 即 $\mathbf{P}$ 满足:

(1) $\mathbf{P}(I)=1$;

(2) 对于任意 $M\in\mathcal{B}(\mathbf{M})$, 有 $\mathbf{P}(M)\geqslant 0$;

(3) $\mathbf{P}$ 是可列可加的, 即对 $\mathcal{B}(\mathbf{M})$ 中任意一列相互正交的正交投影算子 $\{M_k\}$ $(M_kM_j=0,\forall\, k\neq j)$,

$$\mathbf{P}\Big(\sum_k M_k\Big)=\sum_k\mathbf{P}(M_k),$$

其中 $\sum_k M_k$ 是按强算子拓扑求和的级数.

每个 $\mathbf{P}$ 在 $\mathcal{V}(\mathbf{M})$ 上定义唯一一个正线性泛函 $\lambda_{\mathbf{P}}$ 使得 $\lambda_{\mathbf{P}}(I)=1$. 因此, 当 $\mathbb{P}(\mathbf{M})$ 赋予弱 $*$ 拓扑时, 它是一个紧凸集, 它的端点集记作 $\mathbb{P}_{\mathrm{ex}}(\mathbf{M})$, 此时 $\mathbb{P}_{\mathrm{ex}}(\mathbf{M})=\Xi(\mathcal{V}(\mathbf{M}))$.

$\mathbb{H}$ 上的一族正交投影算子 $\{E_\lambda\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$ 称为一个谱族, 如果

(1) 对于任意 $\lambda_1\leqslant\lambda_2$, 有 $E_{\lambda_1}\leqslant E_{\lambda_2}$;

(2) 按强算子拓扑, $\lim_{\lambda\to\infty}E_\lambda=I$ 且 $\lim_{\lambda\to-\infty}E_\lambda=0$;

(3) 映射 $\lambda\mapsto E_\lambda$ 是右连续的, 即对于任意 $\lambda\in\mathbb{R}$, 按强算子拓扑, $\lim_{\varepsilon\searrow 0}E_{\lambda+\varepsilon}=E_\lambda$.

由谱定理可知, 每个自伴算子 A 都存在唯一一个谱族 $\{E^A_\lambda\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$ 使得

$$A=\int_{\mathbb{R}}\lambda dE^A_\lambda;$$

反之亦然. 同样, 每个酉算子 U 都存在唯一一个谱族 $\{E^U_\lambda\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$ 使得

$$U=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}dE^U_\lambda,$$

反之亦然. 下面没有特别说明, 自伴算子都指有界自伴算子, 即自伴算子 A 的谱集 $\mathrm{Sp}(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的有界闭集.

3 人工智能系统

为了研究人工智能 (AI), 我们需要构造高阶形式语言 $\mathfrak{L}(\mathrm{AI})$ 以描述人工智能系统. 因为一般拓扑斯具有内在的高阶语言, 即 Mitchell-Bénabou 语言 (参见文献 [19, VI.5]), 所以我们可以运用拓扑斯理论描述人工智能系统. 由于人工智能系统是多种多样的, 因此描述人工智能系统的拓扑斯也是多种多样的. 依据拓扑斯的不同类别, 即布尔拓扑斯和非布尔拓扑斯, 可以将人工智能系统分为布尔人工智能系统和非布尔人工智能系统两大类; 特别是, 量子人工智能系统是非布尔人工智能系统, 是我们研究的重点内容.

3.1 人工智能语言

下面引进描述人工智能的高阶语言. 根据图灵测试, 它需要包含一个表示输入的基本型 In 用于接受问题和一个表示输出的基本型 Out 用于回答问题.

定义 3.1 人工智能 (AI) 的形式语言 $\mathfrak{L}(\mathrm{AI})$ 是一个形式理论 (formal theory), 由下列要素给出:

(a) 一个型类, 按照如下规则依次生成:

(1) 1, Ω, In 和 Out 都是型, 它们称为基础型 (ground type).

(2) 如果 A 和 B 是型, 则 $A\times B$ 和 PA 是型.

(3) 如果 A 和 B 是型, 则 $\mathrm{Hom}(A,B)$ 是型, 称为函数型 (function type); 特别是, $\mathrm{Hom}(\mathrm{In},\mathrm{Out})$ 称为基本函数型.

(b) 一个项类, 它由一些基本项按照若干运算生成:

(1) 每个型 A 具有可数多个变量 (variable), 记作 $x_1^A, x_2^A, \dots$, 它们都是项, 一个 A 型项 x 记作 $x\in A$.

(2) $*$ 是一个 Ω 型项.

(3) 如果 a 是一个 A 型项且 b 是一个 B 型项, 则 $\langle a,b\rangle$ 是一个 $A\times B$ 型项.

(4) 如果 a 和 a' 都是 A 型项, 则 $a=a'$ 是一个 Ω 型项.

(5) 如果 a 是一个 A 型项且 α 是一个 PA 型项, 则 $a\in\alpha$ 是一个 Ω 型项.

(6) 如果 $\varphi(x)$ 是一个 Ω 型项 (可能包含 A 型自由变量 x), 则 $\{x\in A\mid\varphi(x)\}$ 是一个 PA 型项, 其中 x 称为约束变量 (bound variable).

(7) 对于两个型 A 和 B, 函数型 $\mathrm{Hom}(A,B)$ 是一个集合, 其中的元称为函数符合 (function symbol), 使得对于一个函数符号 $f: A\longrightarrow B$, 如果 t 是一个 A 型项, 则 $f(t)$ 是一个 B 型项, 即函数符号是一个形成项的运算.

(8) 基本函数型 $\mathrm{Hom}(\mathrm{In},\mathrm{Out})$ 是一个非空集, 且对任意一个函数符号 $f:\mathrm{In}\longrightarrow\mathrm{Out}$,

(i) 如果 $\tilde{s}$ 是一个 In 型的自由变量, 则 $f(\tilde{s})$ 是一个 Out 型项;

(ii) 如果 $\tilde{s}$ 是一个 In 型的自由变量且 $\tilde{\Delta}$ 是一个 $P\mathrm{Out}$ 型的自由变量, 则 $f(\tilde{s})\in\tilde{\Delta}$ 是一个 Ω 型项;

(iii) $\{\tilde{s}\in\mathrm{In}\mid f(\tilde{s})\in\tilde{\Delta}\}$ 是一个 $P\mathrm{In}$ 型项, 其中 $\tilde{s}$ 是一个 In 型的约束变量, $\tilde{\Delta}$ 是一个 $P\mathrm{Out}$ 型的自由变量.

注 3.1 (a) 1 称为单元型 (one-element type), Ω 称为真值型 (true-value type) 或命题型 (proposition type), Ω 型项也称为公式 (formula).

(b) 在上述定义中, $\langle -,-\rangle$, $-=-$ 和 $\{x\in A\mid -\}$ 都是形成项的运算. 由这些运算可以定义如下的项和运算:

(1) $\top\equiv *=*$;

(2) $\forall_{x\in A}\varphi(x)\equiv\{x\in A\mid\varphi(x)\}=\{x\in A\mid\top\}$;

(3) $\bot\equiv\forall_{t\in\Omega}t$;

(4) $\{a\}\equiv\{x\in A\mid a=x\}$, 其中 a 是一个 A 型项;

(5) 对于任意 Ω 型项 p 和 q,

(i) $p\wedge q\equiv\langle p,q\rangle=\langle\top,\top\rangle$,

(ii) $p\Longrightarrow q\equiv p\wedge q\Longrightarrow p$,

(iii) $p\vee q\equiv\forall_{t\in\Omega}(((p\Longrightarrow t)\wedge(q\Longrightarrow t))\Longrightarrow t)$,

(iv) $\neg p\equiv p\Longrightarrow\bot$,

(v) $p\Longleftrightarrow q\equiv(p\Longrightarrow q)\wedge(q\Longrightarrow p)$;

(6) $\alpha\subseteq\beta\equiv\forall_{x\in A}(x\in\alpha\Longrightarrow x\in\beta)$, 其中 α 和 β 是 PA 型项;

(7) $\exists_{x\in A}\varphi(x) \equiv \forall_{t\in\Omega}(\forall_{x\in A}(\varphi(x) \Longrightarrow t) \Longrightarrow t)$, 其中 $\varphi(x)$ 是一个 Ω 型项 (可能包含 A 型自由变量 x);

(8) $\exists!_{x\in A}\varphi(x) \equiv \exists_{x'\in A}\{x \in A \mid \varphi(x)\} = \{x'\}$, 其中 $\varphi(x)$ 是一个 Ω 型项 (可能包含 A 型自由变量 x);

(9) $\{\langle x,y\rangle \in A\times B \mid \varphi(x,y)\} \equiv \{z \in A\times B \mid \exists_{x\in A}\exists_{y\in B}(z = \langle x,y\rangle \wedge \varphi(z))\}$, 其中 $\varphi(x,y)$ 是一个 Ω 型项 (可能包含 A 型自由变量 x 和 B 型自由变量 y);

(10) 在 $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$, $\forall_{x\in A}\varphi(x)$, $\exists_{x\in A}\varphi(x)$, $\exists!_{x\in A}\varphi(x)$ 和 $\{\langle x,y\rangle \in A\times B \mid \varphi(x,y)\}$ 中出现的 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(x,y)$ 的变量 x 和 y 称为约束变量 (bound variable), 以其他形式出现的 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(x,y)$ 的变量 x 和 y 称为自由变量 (free variable).

(c) 形式语言 $\mathfrak{L}$(AI) 关于二元蕴涵关系 $\vdash_X$ 的公理系统与基于等式的直觉形语言的公理系统 (参见文献 [17]) 相同, 这里不列出.

因为要用拓扑斯描述人工智能系统, 故由拓扑斯的内在语言, 即 Mitchell-Bénabou 语言 (参见文献 [19, VI.5]), 可以构造人工智能的高阶语言 $\mathfrak{L}$(AI).

定义 3.2 给定一个拓扑斯 $\mathfrak{T}$, 由 $\mathfrak{T}$ 给出的人工智能语言 $\mathfrak{L}$(AI) 是一个二元组 $(\mathfrak{T}, I)$, 其中 I 是一个解释, 它将 $\mathfrak{L}$(AI) 的项解释为 $\mathfrak{T}$ 中的态射, 它们满足下列性质.

(a) (型类) $\mathfrak{L}$(AI) 的型是 $\mathfrak{T}$ 的所有对象, 满足下列规则:

(1) 基础型 1 和 Ω 分别是 $\mathfrak{T}$ 的终端元 1 和子对象分类子 Ω, 而基础型 In 和 Out 分别是 $\mathfrak{T}$ 中的对象 In 和 Out;

(2) 如果 A 和 B 是型, 则 $A\times B$ 型是 $\mathfrak{T}$ 中的乘积 $A\times B$, B^A 型是指数对象 B^A, 特别是, PA 型是指数对象 Ω^A;

(3) 如果 A 和 B 是型, 则函数型 $\mathrm{Hom}(A,B)$ 是态射集 $\mathrm{Hom}(A,B)$, 特别是, 基本函数型

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{In},\mathrm{Out}) \neq \emptyset.$$

(b) (项类) $\mathfrak{L}$(AI) 的项都由 $\mathfrak{T}$ 中的态射给出解释:

(1) A 型变量 x 的解释是 $\mathfrak{T}$ 中的恒等态射 $\mathrm{id}_A : A \longrightarrow A$, 即 $I(x) = \mathrm{id}_A$.

(2) 给定一个 A 型项 a, 当它包含自由变量 $w, y, z, \dots$ 时 (可能其中的一些变量重复出现), 我们按照它们首次出现的顺序排列而不计重复的出现; 如果出现的顺序是 $w, y, z, \dots$ 且它们的型分别是 $W, Y, Z, \dots$, 则 $W\times Y\times Z\times\cdots$ 型称为 a 的源 (source), 此时 a 在 $\mathfrak{T}$ 中的解释是态射

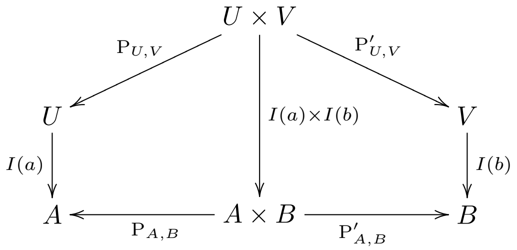
$$I(a) : W\times Y\times Z\times\cdots \longrightarrow A;$$

注意, 当两个不同的变量 y 和 y' 具有相同的 Y 型时, 它的源要包含 $Y\times Y$; 依此类推. 如果一个 A 型项 a 不包含自由变量, 则它的解释是态射 $I(a) : 1 \longrightarrow A$.

(3) 由 A 型项 a 和 B 型项 b 得到 $A\times B$ 型项 $\langle a,b\rangle$, 如果 a 和 b 的解释分别是

$$I(a) : U \longrightarrow A, \quad I(b) : V \longrightarrow B,$$

则 $\langle a,b\rangle$ 的解释 $I(\langle a,b\rangle)$ 是态射 $I(a)\times I(b) : U\times V \longrightarrow A\times B$, 即如下图形:



是交换的, 其中 $I(a) \times I(b) = \langle I(a) \circ \mathrm{P}_{U,V}, I(b) \circ \mathrm{P}'_{U,V} \rangle$.

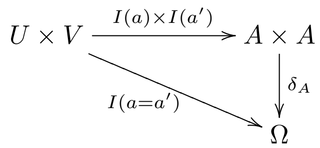
(4) 由两个 A 型项 a 和 a' 得到 Ω 型项 $a = a'$, 如果 a 和 a' 的解释分别是

$$I(a) : U \longrightarrow A, \quad I(a') : V \longrightarrow A,$$

则 $a = a'$ 的解释 $I(a = a')$ 是复合态射

$$\delta_A \circ (I(a) \times I(a')) : U \times V \longrightarrow A \times A \longrightarrow \Omega,$$

即下图:



是交换的, 其中 $\delta_A = \chi_{\langle \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A \rangle}$ 是单态射 $\langle \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A \rangle : A \rightarrowtail A \times A$ 的特征态射.

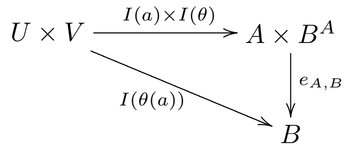
(5) 由 A 型项 a 和 B^A 型项 θ 得到 B 型项 $\theta(a)$, 如果它们的解释分别是

$$I(a) : U \longrightarrow A, \quad I(\theta) : V \longrightarrow B^A,$$

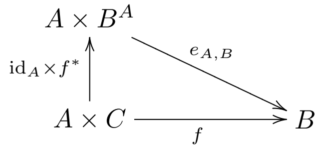
则 $\theta(a)$ 的解释 $I(\theta(a))$ 是复合态射

$$e_{A,B} \circ (I(a) \times I(\theta)) : U \times V \longrightarrow A \times B^A \longrightarrow B,$$

即下图:



是交换的, 其中 $e_{A,B} : A \times B^A \longrightarrow B$ 是估值态射. 它由如下性质确定: 对于任意态射 $f : A \times C \longrightarrow B$, 存在唯一态射 $f^* : C \longrightarrow B^A$ 使得图



是交换的.

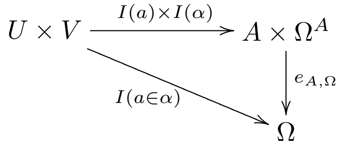
(6) 由 A 型项 a 与 PA 型项 α 得到 Ω 型项 $a \in \alpha$, 如果它们的解释分别是

$$I(a) : U \longrightarrow A, \quad I(\alpha) : V \longrightarrow \Omega^A,$$

则 $a \in \alpha$ 的解释 $I(a \in \alpha)$ 是复合态射

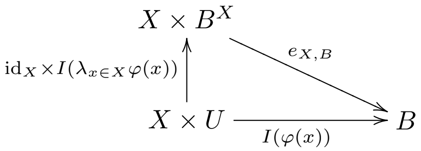
$$e_{A,\Omega} \circ (I(a) \times I(\alpha)) : U \times V \longrightarrow A \times \Omega^A \longrightarrow \Omega,$$

即下图:



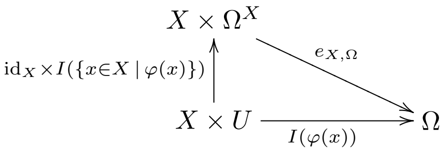
是交换的. 这是 (5) 中 θ 为 PA 型的特例.

(7) 由 X 型变量 x 与 B 型项 $\varphi(x)$ (可能包含 X 型自由变量 x) 得到 B^X 型项 $\lambda_{x\in X}\varphi(x)$, 如果 $\varphi(x)$ 的解释是态射 $I(\varphi(x)) : X \times U \longrightarrow B$, 则 $\lambda_{x\in X}\varphi(x)$ 的解释 $I(\lambda_{x\in X}\varphi(x))$ 是态射 $I(\varphi(x))^* : U \longrightarrow B^X$, 即下图:



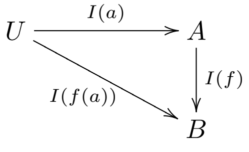
是交换的.

(8) 由 X 型变量 x 与 Ω 型项 $\varphi(x)$ (可能包含 X 型自由变量 x) 得到 PX 型项 $\{x \in X \mid \varphi(x)\}$, 如果 $\varphi(x)$ 的解释 $I(\varphi(x)) : X \times U \longrightarrow \Omega$, 则 $\{x \in X \mid \varphi(x)\}$ 的解释 $I(\{x \in X \mid \varphi(x)\})$ 是态射 $I(\varphi(x))^* : U \longrightarrow \Omega^X$, 即下图:



是交换的. 这是 (7) 中 $B = \Omega$ 情形的特例.

(9) 由函数符号 $f : A \longrightarrow B$ 和 A 型项 a 得到 B 型项 $f(a)$, 如果 f 的解释是态射 $I(f) : A \longrightarrow B$ 且 a 的解释是态射 $I(a) : U \longrightarrow A$, 则 $f(a)$ 的解释 $I(f(a))$ 是复合态射 $I(f) \circ I(a) : U \longrightarrow A \longrightarrow B$, 即下图:



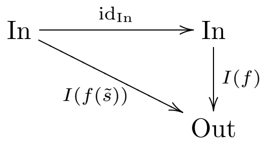
是交换的.

(10) 对于任意一个基本函数符号 $f : \mathrm{In} \longrightarrow \mathrm{Out}$,

(i) 如果 $\tilde{s}$ 是一个 In 型变量, 则 Out 型项 $f(\tilde{s})$ 的解释 $I(f(\tilde{s}))$ 是复合态射

$$I(f) \circ \mathrm{id}_{\mathrm{In}} : \mathrm{In} \longrightarrow \mathrm{In} \longrightarrow \mathrm{Out},$$

即下图:

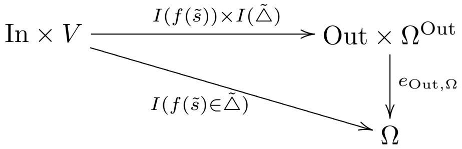


是交换的;

(ii) 如果 $\tilde{s}$ 是一个 In 型变量且 $\tilde{\triangle}$ 是一个 POut 型变量, 其解释 $I(\tilde{\triangle}) : V \longrightarrow \Omega^{\mathrm{Out}}$, 则 Ω 型项 $f(\tilde{s}) \in \tilde{\triangle}$ 的解释 $I(f(\tilde{s}) \in \tilde{\triangle})$ 是复合态射

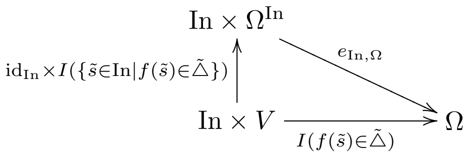
$$e_{\mathrm{Out},\Omega} \circ (I(f(\tilde{s})) \times I(\tilde{\triangle})) : \mathrm{In} \times V \longrightarrow \mathrm{Out} \times \Omega^{\mathrm{Out}} \longrightarrow \Omega,$$

即下图:



是交换的, 其中 $e_{\mathrm{Out},\Omega} : \mathrm{Out} \times \Omega^{\mathrm{Out}} \longrightarrow \Omega$ 是估值态射;

(iii) 由 In 型变量 $\tilde{s}$ 与 POut 型变量 $\tilde{\triangle}$ 得到 PIn 型项 $\{\tilde{s} \in \mathrm{In} \mid f(\tilde{s}) \in \tilde{\triangle}\}$, 它的解释 $I(\{\tilde{s} \in \mathrm{In} \mid f(\tilde{s}) \in \tilde{\triangle}\})$ 是态射 $I(f(\tilde{s}) \in \tilde{\triangle})^* : V \longrightarrow \Omega^{\mathrm{In}}$, 即下图:

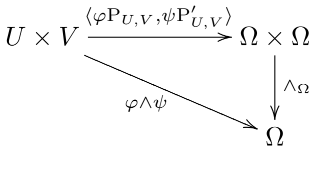


是交换的.

除非会产生混淆或需要特别强调外, 下面项与它的解释以及函数符号与它的解释分别采用相同的记号, 即 A 型项 a 的解释 $I(a)$ 仍记作 a, 函数符号 $f : A \longrightarrow B$ 的解释 $I(f)$ 也记作 $f : A \longrightarrow B$.

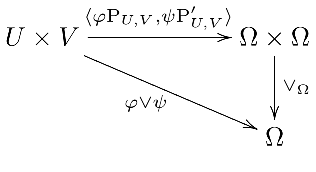
拓扑斯内在语言 $\mathfrak{L}$(AI) 中的 Ω 型项称为该语言的公式 (formula), 即所有其上域 $\mathrm{d}_1(f) = \Omega$ 的态射 f. 由真值态射上的逻辑运算 (参见文献 [13]), 可以在这些公式上定义逻辑演算如下: 对于两个公式 $\varphi : U \longrightarrow \Omega$, $\psi : V \longrightarrow \Omega$,

(i) $\varphi \wedge \psi \equiv \wedge_\Omega \circ \langle \varphi \mathrm{P}_{U,V}, \psi \mathrm{P}'_{U,V} \rangle : U \times V \longrightarrow \Omega$, 即图



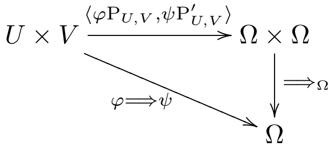
是交换的;

(ii) $\varphi \vee \psi \equiv \vee_\Omega \circ \langle \varphi \mathrm{P}_{U,V}, \psi \mathrm{P}'_{U,V} \rangle : U \times V \longrightarrow \Omega$, 即图



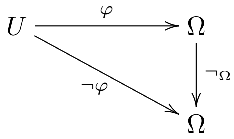
是交换的;

(iii) $\varphi \Longrightarrow \psi \equiv \Longrightarrow_\Omega \circ \langle \varphi \mathrm{P}_{U,V}, \psi \mathrm{P}'_{U,V} \rangle : U \times V \longrightarrow \Omega$, 即图



是交换的;

(iv) $\neg\varphi \equiv \neg_\Omega \circ \varphi : U \longrightarrow \Omega$, 即图



是交换的.

下面解释量词 $\forall$ 和 $\exists$ 的含义. 假设 $\phi(x,y)$ 是一个公式, 其中 x 和 y 分别是 X 型和 Y 型自由变量, 则 $\phi(x,y)$ 的解释是 $\mathfrak{T}$ 中的态射 $\phi(x,y) : X \times Y \longrightarrow \Omega$. 由语言形式得到公式

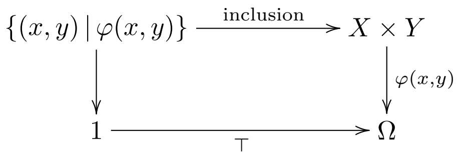
$$\forall_{x \in X} \phi(x,y) \equiv \{x \in X \mid \phi(x,y)\} = \{x \in X \mid \top\},$$

它不再包含 x 作为自由变量, 其解释是态射

$$I(\phi(x,y)^* = (\top \circ \mathrm{P}'_{X,1})^*) = \delta_{\Omega^X} \circ (\phi(x,y)^* \times (\top \circ \mathrm{P}'_{X,1})^*) : Y \times 1 \longrightarrow \Omega^X \times \Omega^X \longrightarrow \Omega,$$

即 $\forall_{x \in X} \phi(x,y) : Y \cong Y \times 1 \longrightarrow \Omega$. 同理可知 $\exists_{x \in X} \phi(x,y)$.

如果 $\varphi(x,y)$ 是一个公式, 具有 X 型自由变量 x 和 Y 型自由变量 y, 则用 $\{(x,y) \mid \varphi(x,y)\}$ 或 $\{(x,y) \in X \times Y \mid \varphi(x,y)\}$ 表示 $X \times Y$ 的子对象, 其使得下图:



是一个拉回, 即 $\varphi(x,y)$ 是 $\{(x,y) \in X \times Y \mid \varphi(x,y)\}$ 的特征态射. 采用这样的记号, 就可以将常规的表达式如 $\{x \mid \varphi(x)\}$ 表示为给定对象 X 的子对象, 就好像对象 X 具有元 x 一样. 特别是, 在 **Sets** 中,

$$\{(x,y) \mid \varphi(x,y)\} = \{(x,y) \in X \times Y \mid \varphi(x,y) = 1\}.$$

因此, 这样给出的定义与通常集合论中的记号一致.

命题 3.1　给定拓扑斯 $\mathfrak{T}$ 描述的人工智能语言 $\mathfrak{L}(\mathrm{AI})$, 设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是两个具有 X 型自由变量 x 的公式, 则在 $\mathrm{Sub}(X)$ 中,

(1) $\{x \mid \varphi(x)\} \wedge \{x \mid \psi(x)\} = \{x \mid \varphi(x) \wedge \psi(x)\}$;

(2) $\{x \mid \varphi(x)\} \vee \{x \mid \psi(x)\} = \{x \mid \varphi(x) \vee \psi(x)\}$;

(3) $\{x \mid \varphi(x)\} \Longrightarrow \{x \mid \psi(x)\} = \{x \mid \varphi(x) \Longrightarrow \psi(x)\}$;

(4) $\neg\{x \mid \varphi(x)\} = \{x \mid \neg\varphi(x)\}$.

证明 (1) 因为 X 的子对象 $\{x \mid \varphi(x)\}$ 和 $\{x \mid \psi(x)\}$ 的特征态射分别是 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$, 它们的交 $\{x \mid \varphi(x)\} \wedge \{x \mid \psi(x)\}$ 是 X 的子对象且其特征态射是 $\wedge_\Omega \circ \langle \varphi(x), \psi(x) \rangle = \varphi(x) \wedge \psi(x)$. 因此, $\{x \mid \varphi(x)\} \wedge \{x \mid \psi(x)\} = \{x \mid \varphi(x) \wedge \psi(x)\}$.

同理, 分别验证 (2)–(4) 等式两边子对象的特征态射是相等的, 细节留作练习. □

3.2 人工智能系统

人工智能由人工智能系统组成, 只有确定了人工智能系统的数学描述才能确定人工智能的科学含义. 下面是人工智能系统的数学定义.

定义 3.3 人工智能系统 (artificial intelligence system) $\mathbf{S}$ 对应于一个局部小拓扑斯 $\mathfrak{T}$, 由 $\mathfrak{T}$ 的内在语言 $\mathcal{L}(\mathfrak{T})$ 描述, 其在 $\mathfrak{T}$ 中的两个基础对象 $\mathrm{In}_{\mathbf{S}}$ 和 $\mathrm{Out}_{\mathbf{S}}$ 使得 $\mathrm{Hom}(\mathrm{In}_{\mathbf{S}}, \mathrm{Out}_{\mathbf{S}})$ 是一个非空集, 其中 $\mathrm{In}_{\mathbf{S}}$ 称为 $\mathbf{S}$ 的输入 (input), $\mathrm{Out}_{\mathbf{S}}$ 称为 $\mathbf{S}$ 的输出 (output), 而 $\mathrm{Hom}(\mathrm{In}_{\mathbf{S}}, \mathrm{Out}_{\mathbf{S}})$ 中的元 $f : \mathrm{In}_{\mathbf{S}} \longrightarrow \mathrm{Out}_{\mathbf{S}}$ 称为该系统的思考过程 (thinking procedure). 该人工智能系统记作 $\mathfrak{T}(\mathrm{In}_{\mathbf{S}}, \mathrm{Out}_{\mathbf{S}})$, 简记为 $\mathfrak{T}(\mathbf{S})$ 或 $\mathfrak{T}_{\mathbf{S}}$.

如果 $\mathfrak{T}$ 是一个布尔拓扑斯, 则 $\mathfrak{T}(\mathbf{S})$ 称为布尔人工智能系统 (Boolean artificial intelligence system), 否则称为非布尔人工智能系统 (non-Boolean artificial intelligence system).

人工智能系统 $\mathfrak{T}(\mathrm{In}_{\mathbf{S}}, \mathrm{Out}_{\mathbf{S}})$ 不仅依赖于拓扑斯 $\mathfrak{T}(\mathrm{AI})$, 而且还依赖于输入 $\mathrm{In}_{\mathbf{S}}$ 和输出 $\mathrm{Out}_{\mathbf{S}}$ 的选取, 即对应于同一个拓扑斯, 如果 $\mathrm{In}_{\mathbf{S}}$ 和 $\mathrm{Out}_{\mathbf{S}}$ 选取不同, 则对应的系统也不同.

注 3.2 布尔人工智能系统之所以称为经典智能系统, 是因为在原理上它们都可以由经典物理系统来实现. 而一个能够由量子物理系统实现的非布尔人工智能系统将称为量子人工智能系统 (见第 4 节). 一般而言, 不是每个非布尔人工智能系统都能够由量子物理系统来实现.

这里给出的人工智能系统的定义可以看成是人工智能系统的一个拓扑斯理论表示. 这种表示不一定是唯一的, 即一个智能系统可以有多种理论表示, 在实际应用中需要恰当地选择合适的理论表示. 在拓扑斯物理理论 (参见文献 [11]) 中已经指出了这一点, 例如一个粒子的运动, 既可以用经典拓扑斯物理描述, 也可以用量子拓扑斯物理描述, 需要根据所考虑的关于粒子运动的物理问题不同而选择不同的拓扑斯理论描述. 同理, 对于一个函数 f 的计算, 既可以考虑在经典人工智能系统中计算 f, 也可以考虑在量子人工智能系统中计算 f.

例 3.1 在集合范畴 **Sets** 中, 设

(1) $\Omega = \{0, 1\}$, $1 = \{*\}$;

(2) 输入对象 $\mathrm{In}_{\mathbf{S}}$ 为非空可测空间 $(\Sigma, \mathcal{F})$, 输出对象 $\mathrm{Out}_{\mathbf{S}}$ 为 $\mathbb{R}$;

(3) 态射空间 $\mathrm{Hom}(\Sigma, \mathbb{R})$ 为 $\mathcal{F}$- 可测函数 $f : \Sigma \mapsto \mathbb{R}$ 全体;

则得到一个经典智能系统 $\mathbf{S}$, 它的输入对象的子对象集 $\mathrm{Sub}(\mathrm{In}_{\mathbf{S}}) = \mathcal{F}$ 是一个布尔代数. 该人工智能系统记作 $\mathfrak{T}(\Sigma, \mathcal{F}; \mathbb{R})$, 其形式语言 $\mathfrak{L}(\Sigma, \mathcal{F}; \mathbb{R})$ 具有如下基本要素.

(i) 基本型: $1 = \{*\}$; $\Omega = \{0, 1\}$, Σ 和 $\mathbb{R}$. 而 $P(\Sigma)$ 是 Σ 的 $\mathcal{F}$- 可测子集全体, $P(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Borel 可测子集全体, 且 $\Sigma \times \mathbb{R} = \{(\omega, x) : \omega \in \Sigma, x \in \mathbb{R}\}$.

(ii) 每个态射 $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}(\Sigma, \mathbb{R})$ 为一个 $\mathcal{F}$- 可测函数 $f : \Sigma \mapsto \mathbb{R}$, 代表该智能系统可计算的对象.

(iii) 型 Ω 的项 (公式) $\tilde{f}(\tilde{s}) \in \tilde{\Delta}$ ($\tilde{s}$ 是 Σ 型自由变量, 而 $\tilde{\Delta}$ 是 $P(\mathbb{R})$ 型自由变量) 由函数 $[\tilde{f}(\tilde{s}) \in \tilde{\Delta}] : \Sigma \times P(\mathbb{R}) \mapsto \{0, 1\}$ 表示, 其中对 $(s, \Delta) \in \Sigma \times P(\mathbb{R})$, 有

$$[\tilde{f}(\tilde{s}) \in \tilde{\Delta}](s, \Delta) = \begin{cases} 1, & f(s) \in \Delta, \\ 0, & f(s) \notin \Delta. \end{cases}$$

(iv) 型 $P(\Sigma)$ 的项 $\{\tilde{s} \mid \tilde{f}(\tilde{s}) \in \tilde{\Delta}\}$ ($\tilde{\Delta}$ 是 $P(\mathbb{R})$ 型自由变量) 由函数 $[\{\tilde{s} \mid \tilde{f}(\tilde{s}) \in \tilde{\Delta}\}] : P(\mathbb{R}) \mapsto P(\Sigma)$ 表示, 其中对 $\Delta \in P(\mathbb{R})$, 有

$$[\{\tilde{s} \mid \tilde{f}(\tilde{s}) \in \tilde{\Delta}\}](\Delta) = f^{-1}(\Delta) = \{s \in \Sigma \mid f(s) \in \Delta\}.$$

3.3 深度学习

一个典型的深度学习模型 (参见文献 [14]) 是前馈神经网络 (feed-forward neural network), 它由 $L+1$ 个层 (layer) 和排列在每个层上若干个节点 (每个节点代表一个 “神经元” (neurons)) 组成, 其中第 $\ell = 0$ 层称为输入层 (input layer), 数据在这里输入到网络; 第 $\ell = L$ 层为输出层, 结果在这里读出; 而中间层 $\ell = 1, \dots, L-1$ 称为隐含层. 在每个层上有一个激活 (activation) 函数 $f^\ell : X_\ell \mapsto V_\ell$ ($\ell = 0, \dots, L-1$), 线性映射

$$\phi_\ell : \mathrm{Hom}(X_{\ell-1}, V_{\ell-1}) \mapsto \mathrm{Hom}(X_\ell, V_\ell), \quad \ell = 1, \dots, L,$$

其中 X_ℓ 是标记第 ℓ 层上神经元个数的指标集且 V_ℓ 是一个向量空间, 以及 (非线性) 映射 $\sigma_\ell : V_\ell \mapsto V_\ell$ ($\ell = 0, 1 \dots, L$). 则该深度学习模型按如下形式计算函数 f :

$$f_0 \longrightarrow f_1 \cdots \longrightarrow f_L = f$$

其中 $f_\ell = \sigma_\ell(\phi_\ell(f_{\ell-1}))$ ($\ell = 1, \dots, L$), 即

$$f = \sigma_L(\phi_L(\sigma_{L-1}(\phi_{L-1} \cdots \sigma_1(\phi_1(\sigma_0(f_0))) \cdots))),$$

这可以用箭头表示如下:

$$f_0 \in \mathrm{Hom}(X_0, V_0) \xrightarrow{\sigma_0} \mathrm{Hom}(X_0, V_0) \xrightarrow{\phi_1} \mathrm{Hom}(X_1, V_1) \xrightarrow{\sigma_1} \mathrm{Hom}(X_1, V_1) \xrightarrow{\phi_2} \cdots$$
$$\xrightarrow{\sigma_{L-1}} \mathrm{Hom}(X_{L-1}, V_{L-1}) \xrightarrow{\phi_L} \mathrm{Hom}(X_L, V_L) \xrightarrow{\sigma_L} f \in \mathrm{Hom}(X_L, V_L).$$

在实际问题中通常需要计算一个 Borel 可测函数 $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. 一个有效的计算方法是采用深度学习模型, 即通过形如

$$f(x) = \phi_L(f_L(\phi_{L-1}(\cdots(f_2(\phi_1(f_1(x)))) \cdots))), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

的复合函数计算 f, 其中

$$f_k : \mathbb{R}^{n_{k-1}} \mapsto \mathbb{R}^{n_k}, \quad \phi_k : \mathbb{R}^{n_k} \mapsto \mathbb{R}^{n_k}, \quad k = 1, \dots, L,$$

$\mathbb{R}^{n_0} = \mathbb{R}^n$ 且 $\mathbb{R}^{n_L} = \mathbb{R}$. 这可以用集合范畴 **Sets** 中的态射 (箭头) 表示如下:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^{n_1} \xrightarrow{\phi_1} \mathbb{R}^{n_1} \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^{n_2} \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{f_{L-1}} \mathbb{R}^{n_{L-1}} \xrightarrow{\phi_{L-1}} \mathbb{R}^{n_{L-1}} \xrightarrow{f_L} \mathbb{R} \xrightarrow{\phi_L} \mathbb{R}.$$

由此可见, 用深度学习算法在计算机上计算一个 Borel 可测函数 $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ 本质上是在经典智能系统 $\mathfrak{T}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n); \mathbb{R})$ 中推理态射 $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

$$f = \phi_L \circ f_L \circ \phi_{L-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ \phi_1 \circ f_1,$$

即如下图形:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}^{n_1} & \xrightarrow{\phi_1} & \mathbb{R}^{n_1} & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R}^{n_2} & \xrightarrow{\phi_2} & \cdots & \xrightarrow{f_{L-1}} & \mathbb{R}^{n_{L-1}} & \xrightarrow{\phi_{L-1}} & \mathbb{R}^{n_{L-1}} \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow f_L \\
 & & & & & & & & & & & & \mathbb{R} \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow \phi_L \\
 & & & & & & f\ (\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}) & & & & & & \mathbb{R}
\end{array}$$

是交换的. 采用这种方法, 每个经典机器学习算法都可以用集合范畴 **Sets** 语言表示成一列态射的复合运算. 因此, 它们都可以在经典人工智能系统中给出表示.

注 3.3 已有一些文献采用范畴理论和拓扑斯理论研究机器学习, 参见文献 [2] 及其所引文献. 这些工作采用范畴理论代替传统机器学习的线性代数和统计描述方式, 试图建立新的机器学习理论形式. 而我们上述的拓扑斯理论形式是将原有的机器学习理论放到经典人工智能的拓扑斯框架下来处理, 即在集合范畴 **Sets** 框架下用态射重新表示机器学习理论. 因此, 这里的理论是从形式语言和逻辑推理即人工智能角度来理解已有的机器学习理论. 另外, 已有的机器学习的范畴和拓扑斯理论还没有提出能用于量子神经网络的理论方案, 但是我们进一步发展的关于量子人工智能的拓扑斯理论可以用于描述量子神经网络, 见第 7 节.

4 量子人工智能的数学模型

本节研究用量子物理系统实现的 (非布尔) 人工智能系统, 称其为量子人工智能系统, 它们对应于 Hilbert 空间上的预层拓扑斯, 即量子系统对应的 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 上的量子测量全体构成的偏序范畴 $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 上的预层范畴 $\mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}}}$.

按照预层的定义, $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 上的一个预层 $\underline{X}$ 是从 $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 到 **Sets** 的反变函子, 即

(1) 对于任意 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有 $\underline{X}(\mathbf{M}) \in \mathbf{Sets}_0$;

(2) 如果 $i_{\mathbf{M},\mathbf{K}}$ 存在, 即 $\mathbf{M} \leqslant \mathbf{K}$, 则 $\underline{X}(i_{\mathbf{M},\mathbf{K}}) : \underline{X}(\mathbf{K}) \longrightarrow \underline{X}(\mathbf{M})$ 是从 $\underline{X}(\mathbf{K})$ 到 $\underline{X}(\mathbf{M})$ 的一个集合映射, 特别是 $\underline{X}(i_{\mathbf{M}}) = \mathrm{id}_{\underline{X}(\mathbf{M})}$ (集合 $\underline{X}(\mathbf{M})$ 上的恒等映射);

(3) 如果 $\mathbf{M} \leqslant \mathbf{K}$ 且 $\mathbf{K} \leqslant \mathbf{L}$, 则

$$\underline{X}(i_{\mathbf{K},\mathbf{L}} \circ i_{\mathbf{M},\mathbf{K}}) = \underline{X}(i_{\mathbf{M},\mathbf{K}}) \circ \underline{X}(i_{\mathbf{K},\mathbf{L}}).$$

从 $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 上预层 $\underline{X}$ 到预层 $\underline{Y}$ 的态射 $\underline{\mathbb{F}} : \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ 定义为一个自然变换 (一族映射)

$$\underline{\mathbb{F}} = \{\alpha_{\mathbf{M}} \in \mathrm{Hom}(\underline{X}(\mathbf{M}), \underline{Y}(\mathbf{M})) : \mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})\},$$

使得如果 $i_{\mathbf{K},\mathbf{M}} : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{M}$ 存在, 则 $\alpha_{\mathbf{K}} \circ \underline{X}(i_{\mathbf{K},\mathbf{M}}) = \underline{Y}(i_{\mathbf{K},\mathbf{M}}) \circ \alpha_{\mathbf{M}}$, 即如下图形:

$$\begin{array}{ccc}
\underline{X}(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\underline{X}(i_{\mathbf{K},\mathbf{M}})} & \underline{X}(\mathbf{K}) \\
\downarrow \alpha_{\mathbf{M}} & & \downarrow \alpha_{\mathbf{K}} \\
\underline{Y}(\mathbf{M}) & \xrightarrow[\underline{Y}(i_{\mathbf{K},\mathbf{M}})]{} & \underline{Y}(\mathbf{K})
\end{array}$$

是交换的.

定义 4.1　范畴 $\mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\rm op}}$ 定义如下:

(1) 对象族为 $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 上预层 $\underline{X}$ 全体;

(2) 对于任意两个对象 $\underline{X}$ 和 $\underline{Y}$, 态射族 $\mathrm{Hom}(\underline{X},\underline{Y})$ 是自然变换 $\underline{\mathbb{F}}:\underline{X}\longrightarrow\underline{Y}$ 全体;

(3) 对于任意对象 $\underline{X}$, 恒等态射 $1_{\underline{X}}:\underline{X}\longrightarrow\underline{X}$ 为一族映射

$$1_{\underline{X}}=\{\mathrm{id}_{\underline{X}(\mathbf{M})}:\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})\},$$

其中 $\mathrm{id}_{\underline{X}(\mathbf{M})}$ 是集合 $\underline{X}(\mathbf{M})$ 上的恒等映射;

(4) 态射的复合运算按照自然变换的复合运算定义, 它满足结合律.

注 4.1　在文献 [8,9,16] 中, 考虑范畴 $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathbb{H})^{\rm op}}$ 作为量子系统的拓扑斯, 而不是范畴 $\mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\rm op}}$. 当完备测量由正交投影算子构成时, 二者是基本相同的 (当 $\mathbb{H}$ 是有限维 Hilbert 空间时, 二者同构). 但是, 当考虑非 Hermite 量子力学 (non-Hermitian quantum mechanics) 时 (参见文献 [4]), 完备测量一般是由不必自伴的投影算子 (即有界幂等算子) 构成的, 此时需要用范畴 $\mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\rm op}}$ 作为量子系统的拓扑斯, 而不能用范畴 $\mathbf{Sets}^{\mathcal{V}(\mathbb{H})^{\rm op}}$.

命题 4.1　给定范畴 $\mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\rm op}}$ 的一个对象 $\underline{X}$, 则 $\underline{X}$ 的每个子对象都唯一确定一个预层 $\underline{S}$ 使得它与态射 $\underline{\subset}:\underline{S}\longrightarrow\underline{X}$ 是等价的, 其中对每个 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, $\underline{S}(\mathbf{M})\subseteq\underline{X}(\mathbf{M})$ 且 $\subseteq_{\mathbf{M}}:\underline{S}(\mathbf{M})\longrightarrow\underline{X}(\mathbf{M})$ 是集合的包含映射.

证明　设 $\underline{\mathbb{F}}=\{\alpha_{\mathbf{M}}:\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})\}:\underline{Y}\longrightarrow\underline{X}$ 是一个单态射, 则对每个 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, $\alpha_{\mathbf{M}}:\underline{Y}(\mathbf{M})\mapsto\underline{X}(\mathbf{M})$ 是一个集合单映射, 从而 $\alpha_{\mathbf{M}}:\underline{Y}(\mathbf{M})\mapsto\alpha_{\mathbf{M}}(\underline{Y}(\mathbf{M}))$ 是 1-1 的集合映射. 令 $\underline{S}(\mathbf{M})=\alpha_{\mathbf{M}}(\underline{Y}(\mathbf{M}))$, 且如果 $i_{\mathbf{L},\mathbf{M}}$ 存在, 令 $\underline{S}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})=\alpha_{\mathbf{L}}\circ\underline{Y}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})\circ\alpha_{\mathbf{M}}^{-1}:\underline{S}(\mathbf{M})\mapsto\underline{S}(\mathbf{L})$, 则 $\underline{S}$ 是一个预层, 即 $\mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\rm op}}$ 的一个对象. 直接验证可知, 包含态射 $\underline{\subset}:\underline{S}\longrightarrow\underline{X}$ 是单态射且等价于 $\underline{\mathbb{F}}$. □

上述结果说明, $\underline{X}$ 的每个子对象类都由如上定义的一个对象 $\underline{S}$ 唯一确定. 下面总是用这样的对象 $\underline{S}$ 代表 $\underline{X}$ 的子对象类, 记作 $\underline{S}\subset\underline{X}$. 因此,

$$\mathrm{Sub}(\underline{X})=\{\underline{S}\in(\mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\rm op}})_0:\underline{S}\subset\underline{X}\}.\tag{4.1}$$

命题 4.2　范畴 $\mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\rm op}}$ 是一个拓扑斯, 记作 $\mathfrak{T}(\mathbb{H})$.

证明　范畴 $\mathfrak{T}(\mathbb{H})$ 是 Grothendieck 拓扑斯的一个特殊情形, 故是一个拓扑斯, 参见文献 [19]. 下面只给出它的终端对象和子对象分类子的具体构造.

首先给出 $\mathfrak{T}(\mathbb{H})$ 的终端对象 $1_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}$. 给定集合范畴 $\mathbf{Sets}$ 的一个终端对象单点集 $\{*\}$. 对于任意 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, 定义 $1_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}(\mathbf{M})=\{*\}$, 且如果 $i_{\mathbf{K},\mathbf{M}}:\mathbf{K}\longrightarrow\mathbf{M}$ 存在, 定义 $1_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}(i_{\mathbf{K},\mathbf{M}})=\mathrm{id}_{\{*\}}$, 则如此定义的 $1_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}$ 是 $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 上的一个预层. 为了证明 $1_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}$ 是一个终端对象, 设 $\underline{X}$ 是 $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 上的一个预层. 则态射 $1_{\underline{X}}:\underline{X}\longrightarrow 1_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}$ 是如下唯一的自然变换 $\{\alpha_{\mathbf{M}}\in\mathrm{Hom}(\underline{X}(\mathbf{M}),\{*\}):\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})\}$, 其中 $\alpha_{\mathbf{M}}(x)=*,\forall\,x\in\underline{X}(\mathbf{M})$, 即 $\mathrm{Hom}(\underline{X},1_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})})$ 只有一个态射 $1_{\underline{X}}$. 因此, $1_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}$ 是 $\mathfrak{T}(\mathbb{H})$ 的一个终端对象.

其次, 构造 $\mathfrak{T}(\mathbb{H})$ 的子对象分类子 $\Omega_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}$ 和相应的态射 $\top:1_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}\longrightarrow\Omega_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}$. 对于任意 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, $\mathbf{M}$ 上的一个筛子 (sieve) 是 $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 的一个子集 $\mathcal{S}$ 使得如果 $\mathbf{K}\in\mathcal{S}$, 则 $\mathbf{K}\leqslant\mathbf{M}$, 且当 $\mathbf{L}\leqslant\mathbf{K}$ 时 $\mathbf{L}\in\mathcal{S}$; 而 $\downarrow\mathbf{M}=\{\mathbf{L}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})\mid\mathbf{L}\leqslant\mathbf{M}\}$ 是一个筛子, 称为 $\mathbf{M}$ 上的主筛子 (principal sieve). 预层 $\Omega_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}$ 定义如下: (1) 对于任意 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, $\Omega_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}(\mathbf{M})$ 为 $\mathbf{M}$ 上的筛子全体构成的集合; (2) 如果 $i_{\mathbf{K},\mathbf{M}}:\mathbf{K}\longrightarrow\mathbf{M}$ 存在, 则 $\Omega_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}(i_{\mathbf{K},\mathbf{M}}):\Omega_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}(\mathbf{M})\longrightarrow\Omega_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}(\mathbf{K})$ 使得对于任意 $\mathcal{S}\in\Omega_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}(\mathbf{M})$, 有

$$\Omega_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}(i_{\mathbf{K},\mathbf{M}})(\mathcal{S})=\{\mathbf{L}\in\mathcal{S}\mid\mathbf{L}\leqslant\mathbf{K}\}=\downarrow\mathbf{K}\cap\mathcal{S}.$$

而态射 $\top : 1_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})} \longrightarrow \Omega_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}$ 定义如下: 对于任意 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有 $\top_{\mathbf{M}} : \{*\} \mapsto \Omega_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}(\mathbf{M})$ 使得 $\top_{\mathbf{M}}(*) =\downarrow \mathbf{M}$.

设 $\underline{S}$ 是 $\underline{X}$ 的一个子对象, 即 $\underline{S} \subset \underline{X}$. 定义它的特征态射 $\chi_{\underline{S}} : \underline{X} \longrightarrow \Omega_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}$ 如下: 对于任意 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ 和任意 $x \in \underline{X}(\mathbf{M})$, 有

$$\chi_{\underline{S}}(\mathbf{M})(x) = \{\mathbf{L} \in \downarrow \mathbf{M} \mid \underline{X}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})(x) \in \underline{S}(\mathbf{L})\},$$

其中等式右边集合是 $\mathbf{M}$ 上的一个筛子, 这是因为 $\underline{S} \subset \underline{X}$. 由上述构造可以证明

$$\begin{array}{ccc} \underline{S} & \xrightarrow{\subseteq} & \underline{X} \\ {\scriptstyle 1_{\underline{S}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi_{\underline{S}}} \\ 1_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})} & \xrightarrow{\top} & \Omega_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})} \end{array}$$

是一个拉回四边形. 因此, $\Omega_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})}$ 是 $\mathfrak{T}(\mathbb{H})$ 的子对象分类子. □

对于 $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 上的一个预层 $\underline{X}$, 它的每个全局元是一个态射 $\gamma : 1_{\mathfrak{T}(\mathbb{H})} \longrightarrow \underline{X}$ 使得对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, $\gamma_{\mathbf{M}} = \gamma(\mathbf{M})(*) \in \underline{X}(\mathbf{M})$, 且如果 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{K}$ 则满足匹配条件 $\underline{X}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}})(\gamma_{\mathbf{K}}) = \gamma_{\mathbf{L}}$. 此时, γ 也称为 $\underline{X}$ 的一个全局截面 (global section), 它表示 γ 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ 都选取集合 $\underline{X}(\mathbf{M})$ 中的一个元 $\gamma_{\mathbf{M}}$ 满足上述 "匹配条件".

定义 4.2 一个量子人工智能系统 (quantum artificial intelligence system) $\mathbf{S}$ 对应于一个 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 上的拓扑斯 $\mathfrak{T}(\mathbb{H})$, 它具有两个基础对象 $\mathrm{In}(\mathbb{H})$ 和 $\mathrm{Out}(\mathbb{H})$ 使得 $\mathrm{Hom}(\mathrm{In}(\mathbb{H}), \mathrm{Out}(\mathbb{H}))$ 是一个非空集, 其中 $\mathrm{In}(\mathbb{H})$ 称为 $\mathbf{S}$ 的输入对象, 而 $\mathrm{Out}(\mathbb{H})$ 称为输出对象. 该量子人工智能系统简称为量子智能系统 $\mathfrak{T}(\mathbb{H})$.

为了构造量子智能系统, 需要构造其输入对象和输出对象. 下面构造输入对象 $\mathrm{In}(\mathbb{H})$. 输出对象 $\mathrm{Out}(\mathbb{H})$ 将在第 5 节中构造.

定义 4.3 谱预层 $\underline{\Sigma} : \mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ 是一个函子, 满足如下性质:

(1) 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有 $\underline{\Sigma}(\mathbf{M}) = \mathbb{P}_{\mathrm{ex}}(\mathbf{M})$;

(2) 若 $\mathbf{L}, \mathbf{K} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ 满足 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{K}$, 则 $\underline{\Sigma}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}}) : \underline{\Sigma}(\mathbf{K}) \mapsto \underline{\Sigma}(\mathbf{L})$ 定义如下: 对于任意 $\mathbf{P} \in \underline{\Sigma}(\mathbf{K})$, 有

$$\underline{\Sigma}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}})(\mathbf{P}) = \mathbf{P}|_{\mathcal{B}(\mathbf{L})},$$

即概率测度 $\mathbf{P}$ 限制在布尔子代数 $\mathcal{B}(\mathbf{L}) \subset \mathcal{B}(\mathbf{K})$ 上得到的概率测度.

注 4.2 在文献 [8,9] 中, 谱预层 $\underline{\Sigma}$ 是从 $V \in \mathcal{V}(\mathbb{H})$ 到 V 的 Gel'fand 谱集 $\Xi(V)$ 的函子. 正如注 4.1 所表明的, 文献 [8,9] 中的定义对于非 Hermite 量子力学不适用, 而定义 4.3 对于非 Hermite 情形同样适用.

命题 4.3 谱预层 $\underline{\Sigma}$ 的每个子对象都由一个预层 $\underline{S}$ 确定, 其中 $\underline{S}$ 定义如下:

(1) 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有 $\underline{S}(\mathbf{M}) \subseteq \underline{\Sigma}(\mathbf{M})$;

(2) 如果 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{M}$, 则 $\underline{\Sigma}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}}) : \underline{S}(\mathbf{M}) \mapsto \underline{S}(\mathbf{L})$ 使得对于任意 $\mathbf{P} \in \underline{S}(\mathbf{M})$, 有

$$\underline{S}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})(\mathbf{P}) = \mathbf{P}|_{\mathcal{B}(\mathbf{L})} \in \underline{S}(\mathbf{L}).$$

证明 由命题 4.1 立即可得. □

定义 4.4 在量子人工智能系统 $\mathfrak{T}(\mathbb{H})$ 中, 输入对象 $\mathrm{In}(\mathbb{H})$ 定义为谱预层 $\underline{\Sigma}$.

接下来证明每个投影算子 (量子命题) 都可以嵌入到谱预层 $\underline{\Sigma}$ 中.

定义 4.5 (参见文献 [9, 定义 2.1])　设 P 是 $\mathbb{H}$ 上的一个正交投影算子. 给定一个完备测量 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$.

(1) 在 P 上的外确在化运算 (outer daseinisation operation) $\delta^o(P)_{\mathbf{M}}$ 定义为

$$\delta^o(P)_{\mathbf{M}} = \wedge\{Q \in \mathcal{B}(\mathbf{M}) \mid Q \geqslant P\};$$

(2) 在 P 上的内确在化运算 (inner daseinisation operation) $\delta^i(P)_{\mathbf{M}}$ 定义为

$$\delta^i(P)_{\mathbf{M}} = \vee\{Q \in \mathcal{B}(\mathbf{M}) \mid Q \leqslant P\}.$$

注 4.3　"daseinisation" 是在文献 [8] 中创造的一个新词, 它从德文 "dasein" 转化而来, 其含义为 "确在" (being-there-in-the world).

定义 4.6　(1) 外预层 $\underline{O} : \mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ 是一个函子, 满足如下性质:

(i) 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有 $\underline{O}(\mathbf{M}) = \mathcal{B}(\mathbf{M})$;

(ii) 如果 $\mathbf{L}, \mathbf{K} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ 满足 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{K}$, 则 $\underline{O}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}}) : \mathcal{B}(\mathbf{K}) \mapsto \mathcal{B}(\mathbf{L})$ 定义为, 对于任意 $P \in \mathcal{B}(\mathbf{K})$, 有

$$\underline{O}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}})(P) = \delta^o(P)_{\mathbf{L}}.$$

(2) 内预层 $\underline{I} : \mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ 是一个函子, 满足如下性质:

(i) 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有 $\underline{I}(\mathbf{M}) = \mathcal{B}(\mathbf{M})$;

(ii) 如果 $\mathbf{L}, \mathbf{K} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ 满足 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{K}$, 则 $\underline{I}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}}) : \mathcal{B}(\mathbf{K}) \mapsto \mathcal{B}(\mathbf{L})$ 定义为, 对于任意 $P \in \mathcal{B}(\mathbf{K})$, 有

$$\underline{I}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}})(P) = \delta^i(P)_{\mathbf{L}}.$$

命题 4.4　给定一个正交投影算子 P, 则映射 $\mathcal{M}(\mathbb{H}) \ni \mathbf{M} \longrightarrow \delta^o(P)_{\mathbf{M}} \in \mathcal{B}(\mathbf{M})$ 确定了外预层 $\underline{O}$ 的一个全局元 $\delta^o(P) : 1 \longrightarrow \underline{O}$. 同样, 映射 $\mathcal{M}(\mathbb{H}) \ni \mathbf{M} \longrightarrow \delta^i(P)_{\mathbf{M}} \in \mathcal{B}(\mathbf{M})$ 确定了内预层 $\underline{I}$ 的一个全局元 $\delta^i(P) : 1 \longrightarrow \underline{I}$.

证明　对于任意 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有 $\delta^o(P)(\mathbf{M}) = \delta^o(P)_{\mathbf{M}} \in \mathcal{B}(\mathbf{M})$; 且当 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{K}$ 时,

$$\underline{O}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}})(\delta^o(P)_{\mathbf{K}}) = \delta^o(\delta^o(P)_{\mathbf{K}})_{\mathbf{L}} = \delta^o(P)_{\mathbf{L}}.$$

因此, $\delta^o(P)$ 是 $\underline{O}$ 的一个全局截面. 同理可知 $\delta^i(P) : 1 \longrightarrow \underline{I}$ 是一个全局元. □

由命题 4.4 可得如下命题:

命题 4.5　设 δ^o 为将每个 $P \in \mathcal{P}(\mathbb{H})$ 映射到全局截面 $\delta^o(P) : 1 \longrightarrow \underline{O}$ 的映射 $\delta^o : \mathcal{P}(\mathbb{H}) \mapsto \Gamma\underline{O}$. 类似地, 定义映射 $\delta^i : \mathcal{P}(\mathbb{H}) \mapsto \Gamma\underline{I}$. 则映射 $\delta^o : \mathcal{P}(\mathbb{H}) \mapsto \Gamma\underline{O}$ 和 $\delta^i : \mathcal{P}(\mathbb{H}) \mapsto \Gamma\underline{I}$ 都是单射.

证明　如果全局元 $\gamma = \delta^o(P)$, 其中 P 是一个正交投影算子, 则

$$P = \bigwedge_{\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})} \delta^o(P)_{\mathbf{M}},$$

这是因为 $\delta^o(P)_{\mathbf{M}} \geqslant P$ 且当 $P \in \mathbf{M}$ 时, $\delta^o(P)_{\mathbf{M}} = P$. 如果 $\delta^o(P) = \delta^o(Q)$, 则

$$P = \bigwedge_{\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})} \delta^o(P)_{\mathbf{M}} = \bigwedge_{\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})} \delta^o(Q)_{\mathbf{M}} = Q.$$

因此, δ^o 是一个单射. 同理可知 δ^i 是一个单射. □

命题 4.6 给定一个正交投影算子 $P \in \mathcal{P}(\mathbb{H})$, 对于任意 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 令

$$\underline{\delta^o(P)}(\mathbf{M}) = \{\mathbf{P} \in \underline{\Sigma}(\mathbf{M}) \mid \mathbf{P}(\delta^o(P)_{\mathbf{M}}) = 1\},$$

则 $\underline{\delta^o(P)} = \{\underline{\delta^o(P)}(\mathbf{M}) \mid \mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})\}$ 是谱预层 $\underline{\Sigma}$ 的一个子对象.

证明 对于任意 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 由定义可知 $\underline{\delta^o(P)}(\mathbf{M}) \subseteq \underline{\Sigma}(\mathbf{M})$. 对于任意 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{M}$, 因为

$$\delta^o(P)_{\mathbf{L}} = \wedge\{Q \in \mathcal{B}(\mathbf{L}) \mid Q \geqslant \delta^o(P)_{\mathbf{M}}\} \geqslant \delta^o(P)_{\mathbf{M}},$$

所以对每个 $\mathbf{P} \in \underline{\delta^o(P)}(\mathbf{M})$, 有

$$\mathbf{P}(\delta^o(P)_{\mathbf{L}}) = \mathbf{P}(\delta^o(P)_{\mathbf{M}}) + \mathbf{P}(\delta^o(P)_{\mathbf{L}} - \delta^o(P)_{\mathbf{M}}) = 1,$$

这是因为 $\mathbf{P}$ 是一个概率测度且 $\mathbf{P}(\delta^o(P)_{\mathbf{M}}) = 1$. 因此,

$$\{\mathbf{P}|_{\mathcal{B}(\mathbf{L})} \mid \mathbf{P} \in \underline{\delta^o(P)}(\mathbf{M})\} \subset \underline{\delta^o(P)}(\mathbf{L}),$$

该等式左边是子集 $\underline{\Sigma}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})$ $(\underline{\delta^o(P)}(\mathbf{M})) \subseteq \underline{\Sigma}(\mathbf{L})$. 故 $\underline{\delta^o(P)}$ 是谱预层 $\underline{\Sigma}$ 的一个子对象. □

注 4.4 定义 $\underline{\delta}^o : \mathcal{P}(\mathbb{H}) \mapsto \mathrm{Sub}(\underline{\Sigma})$ 为 $\underline{\delta}^o(P) = \underline{\delta^o(P)}$, 则它是从 $\mathcal{P}(\mathbb{H})$ 到 $\mathrm{Sub}(\underline{\Sigma})$ 的映射. 因为每个正交投影算子 $P \in \mathcal{P}(\mathbb{H})$ 代表量子系统的一个命题, 故谱预层 $\underline{\Sigma}$ 的子对象 $\underline{\delta^o(P)}$ 是命题 P 在量子智能系统 $\mathfrak{T}(\mathbb{H})$ 中的表示.

虽然量子逻辑 $\mathcal{P}(\mathbb{H})$ 不是一个推理系统, 但是在文献 [8,9] 中已经证明, $\mathrm{Sub}(\underline{\Sigma})$ 是一个 Heyting 代数, 因而它构成量子智能系统 $\mathfrak{T}(\mathbb{H})$ 的一个逻辑推理系统.

5 量子智能系统的输出

本节要构造量子智能系统的输出对象 $\mathrm{Out}(\mathbb{H})$, 它对应三种情形: $\mathbb{R}^{\succeq}$, $\mathbb{R}^{\preceq}$ 和 $\mathbb{R}^{\leftrightarrow}$. 由此给出有界自伴算子的拓扑斯理论表示, 即每个有界自伴算子都对应一个态射 $f : \underline{\Sigma} \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathbb{H})$.

定义 5.1 设 A 和 B 是两个自伴算子, 分别具有谱族 $\{E^A_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ 和 $\{E^B_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. 如果

$$E^B_\lambda \leqslant E^A_\lambda, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},$$

则称依谱序 A 小于 B, 记作 $A \leqslant_s B$.

注 5.1 注意, 自伴算子的谱序与相应的谱族中正交投影算子的序是反向的. 谱序 $\leqslant_s$ 是有界自伴算子全体 $\mathcal{L}(\mathbb{H})_{\mathrm{sa}}$ 上的一个偏序. 对于正交投影算子 P 和 Q, $P \leqslant_s Q$ 当且仅当 $P \leqslant Q$. 一般而言, 对两个自伴算子 A 和 B, 如果 $A \leqslant_s B$, 则 $A \leqslant B$ (即 $\langle h, Ah\rangle \leqslant \langle h, Bh\rangle, \forall\, h \in \mathbb{H}$), 反之不一定成立.

命题 5.1 设 $\{E_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ 是一个谱族, 则对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 映射

$$\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \delta^i(E_\lambda)_{\mathbf{M}}, \quad 和 \quad \mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \bigwedge_{\mu > \lambda} \delta^o(E_\mu)_{\mathbf{M}}$$

都是谱族.

证明 由确在化运算的定义可知这两个映射都是右连续的, 故结论成立. □

注 5.2 这两个映射的正交投影算子都在 $\mathcal{B}(\mathbf{M})$ 中, 因此它们确定了 $\mathcal{V}(\mathbf{M})$ 中的两个自伴算子. 注意, 映射 $\lambda \mapsto \delta^o(E^A_\lambda)_{\mathbf{M}}$ 在 $\mathbb{R}$ 上不是右连续的, 故不是一个谱族.

定义 5.2 设 A 是 $\mathbb{H}$ 上的一个自伴算子, 具有谱族 $\{E_\lambda^A \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. A 的外确在化 $\delta^o(A)$ 和内确在化 $\delta^i(A)$ 分别定义为, 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有

$$\delta^o(A)_{\mathbf{M}} = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(\delta^i(E_\lambda^A)_{\mathbf{M}}),$$
$$\delta^i(A)_{\mathbf{M}} = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\Big(\bigwedge_{\mu>\lambda} \delta^o(E_\mu^A)_{\mathbf{M}}\Big).$$

注 5.3 对于任意 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 都有 $\delta^o(A)_{\mathbf{M}}, \delta^i(A)_{\mathbf{M}} \in \mathcal{V}(\mathbf{M})$. 因为

$$\delta^i(E_\lambda^A)_{\mathbf{M}} \leqslant \bigwedge_{\mu>\lambda} \delta^o(E_\mu^A)_{\mathbf{M}}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},$$

故 $\delta^i(A)_{\mathbf{M}} \leqslant_s \delta^o(A)_{\mathbf{M}}$.

命题 5.2 设 A 是 $\mathbb{H}$ 上的一个自伴算子, 具有谱族 $\{E_\lambda^A \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$,

(1) 如果 $A \in \mathcal{V}(\mathbf{M})$, 则 $A = \delta^o(A)_{\mathbf{M}} = \delta^i(A)_{\mathbf{M}}$;

(2) $\delta^o(A)_{\mathbf{M}} = \wedge\{B \in \mathcal{V}(\mathbf{M}) \mid A \leqslant_s B\}$, 即 $\delta^o(A)_{\mathbf{M}}$ 是 $\mathcal{V}(\mathbf{M})$ 中按谱序大于 A 的最小自伴算子;

(3) $\delta^i(A)_{\mathbf{M}} = \vee\{B \in \mathcal{V}(\mathbf{M}) \mid B \leqslant_s A\}$, 即 $\delta^i(A)_{\mathbf{M}}$ 是 $\mathcal{V}(\mathbf{M})$ 中按谱序小于 A 的最大自伴算子;

(4) $\mathrm{Sp}(\delta^o(A)_{\mathbf{M}}) \subset \mathrm{Sp}(A)$ 且 $\mathrm{Sp}(\delta^i(A)_{\mathbf{M}}) \subset \mathrm{Sp}(A)$.

证明 由定义可得 (1)–(3) 成立. 下面证明 (4) 成立. 对自伴算子 A, 如果 $\lambda_0 \notin \mathrm{Sp}(A)$, 则谱族 E_λ^A 在 λ_0 的某个小邻域中是恒等的. 由定义可知, $\delta^i(E_\lambda^A)_{\mathbf{M}}$ 在该邻域中也是不变的, 故 $\lambda_0 \notin \mathrm{Sp}(\delta^o(A)_{\mathbf{M}})$. 因此, $\mathrm{Sp}(\delta^o(A)_{\mathbf{M}}) \subset \mathrm{Sp}(A)$. 同理可证 $\mathrm{Sp}(\delta^i(A)_{\mathbf{M}}) \subset \mathrm{Sp}(A)$. □

对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 用 $\mathcal{V}(\mathbf{M})_{\mathrm{sa}}$ 表示 $\mathcal{V}(\mathbf{M})$ 中的自伴算子全体, 它按谱序是一个偏序范畴.

定义 5.3 (1) 外 de Groote 预层 $\underline{O}_{\mathrm{sa}} : \mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ 是一个函子使得

(i) 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有 $\underline{O}_{\mathrm{sa}}(\mathbf{M}) = \mathcal{V}(\mathbf{M})_{\mathrm{sa}}$;

(ii) 如果 $\mathbf{L}, \mathbf{K} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ 满足 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{K}$, 则 $\underline{O}_{sa}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}}) : \underline{O}_{\mathrm{sa}}(\mathbf{K}) \mapsto \underline{O}_{\mathrm{sa}}(\mathbf{L})$ 定义为, 对于任意 $A \in \underline{O}_{sa}(\mathbf{K})$, 都有

$$\underline{O}_{\mathrm{sa}}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}})(A) = \delta^o(A)_{\mathbf{L}}.$$

(2) 内 de Groote 预层 $\underline{I}_{\mathrm{sa}} : \mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ 是一个函子使得

(i) 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有 $\underline{I}_{\mathrm{sa}}(\mathbf{M}) = \mathcal{V}(\mathbf{M})_{\mathrm{sa}}$;

(ii) 如果 $\mathbf{L}, \mathbf{K} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ 满足 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{K}$, 则 $\underline{I}_{\mathrm{sa}}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}}) : \underline{I}_{\mathrm{sa}}(\mathbf{K}) \mapsto \underline{I}_{\mathrm{sa}}(\mathbf{L})$ 定义为, 对于任意 $A \in \underline{I}_{\mathrm{sa}}(\mathbf{K})$, 都有

$$\underline{I}_{\mathrm{sa}}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}})(A) = \delta^i(A)_{\mathbf{L}}.$$

命题 5.3 给定一个自伴算子 A, 则映射 $\mathcal{M}(\mathbb{H}) \ni \mathbf{M} \longrightarrow \delta^o(A)_{\mathbf{M}} \in \mathcal{V}(\mathbf{M})$ 确定了外 de Groote 预层 $\underline{O}_{\mathrm{sa}}$ 的一个全局元 $\delta^o(A) : 1 \longrightarrow \underline{O}_{\mathrm{sa}}$. 同样, 映射 $\mathcal{M}(\mathbb{H}) \ni \mathbf{M} \longrightarrow \delta^i(A)_{\mathbf{M}} \in \mathcal{V}(\mathbf{M})$ 确定了内 de Groote 预层 $\underline{I}_{\mathrm{sa}}$ 的一个全局元 $\delta^i(A) : 1 \longrightarrow \underline{I}_{\mathrm{sa}}$. 特别地, 映射 $\delta^o : \mathcal{L}(\mathbb{H})_{\mathrm{sa}} \mapsto \Gamma\underline{O}_{\mathrm{sa}}$ 和 $\delta^i : \mathcal{L}(\mathbb{H})_{\mathrm{sa}} \mapsto \Gamma\underline{I}_{\mathrm{sa}}$ 都是单射.

证明 对于任意 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 都有 $\delta^o(A)(\mathbf{M}) = \delta^o(A)_{\mathbf{M}} \in \mathcal{V}(\mathbf{M})$; 且当 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{K}$ 时,

$$\underline{O}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}})(\delta^o(A)_{\mathbf{K}}) = \delta^o(\delta^o(A)_{\mathbf{K}})_{\mathbf{L}} = \delta^o(A)_{\mathbf{L}}.$$

因此, $\delta^o(A)$ 是 $\underline{O}_{\rm sa}$ 的一个全局截面. 同理可知 $\delta^i(A): 1 \longrightarrow \underline{I}_{\rm sa}$ 是一个全局元.

如果 $\delta^o(A) = \delta^o(B)$, 其中 A 和 B 是两个自伴算子, 由谱定理的唯一性知, 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有

$$\delta^i(E^A_\lambda)_{\mathbf{M}} = \delta^i(E^B_\lambda)_{\mathbf{M}}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},$$

则由命题 4.5 可知 δ^i 是单射, 故 $E^A_\lambda = E^B_\lambda$, 即 $A = B$. 因此, $\delta^o : \mathcal{L}(\mathbb{H})_{\rm sa} \mapsto \Gamma\underline{O}_{\rm sa}$ 是单射. 同理可证, $\delta^i : \mathcal{L}(\mathbb{H})_{\rm sa} \mapsto \Gamma\underline{I}_{\rm sa}$ 也是单射. □

设 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 是两个偏序集. 给定一个函数 $f : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{Q}$, 如果对于任意 $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, 当 $P_1 \leqslant_{\mathcal{P}} P_2$ 时都有 $f(P_1) \leqslant_{\mathcal{Q}} f(P_2)$, 则称 f 是保序的 (order-preserving); 当 $P_1 \leqslant_{\mathcal{P}} P_2$ 时都有 $f(P_1) \geqslant_{\mathcal{Q}} f(P_2)$, 则称 f 是反序的 (order-reversing). 用 $\mathcal{O}_{\rm p}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ 记保序函数 $f : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{Q}$ 全体, 用 $\mathcal{O}_{\rm r}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ 记反序函数 $f : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{Q}$ 全体.

对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, $\downarrow \mathbf{M} = \{\mathbf{L} \in \mathcal{M}(\mathbb{H}) \mid \mathbf{L} \leqslant \mathbf{M}\}$ 是 $\mathbf{M}$ 上的主筛子, 它按照加细序是一个偏序集.

定义 5.4 设 $\mathcal{P}$ 是一个偏序集.

(1) 预层 $\underline{\mathcal{P}}^{\succeq} : \mathcal{M}(\mathbb{H})^{\rm op} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ 是一个函子使得

(i) 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有

$$\underline{\mathcal{P}}^{\succeq}(\mathbf{M}) = \{f :\downarrow \mathbf{M} \mapsto \mathcal{P} \mid f \in \mathcal{O}_{\rm r}(\downarrow \mathbf{M}, \mathcal{P})\};$$

(ii) 如果 $\mathbf{L}, \mathbf{K} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ 满足 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{K}$, 则 $\underline{\mathcal{P}}^{\succeq}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}}) : \underline{\mathcal{P}}^{\succeq}(\mathbf{K}) \mapsto \underline{\mathcal{P}}^{\succeq}(\mathbf{L})$ 定义为, 对于任意 $f \in \underline{\mathcal{P}}^{\succeq}(\mathbf{K})$, 都有

$$\underline{\mathcal{P}}^{\succeq}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}})(f) = f|_{\mathbf{L}},$$

其中 $f|_{\mathbf{L}}$ 表示 f 在 $\downarrow \mathbf{L}$ 上的限制.

(2) 预层 $\underline{\mathcal{P}}^{\preceq} : \mathcal{M}(\mathbb{H})^{\rm op} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ 是一个函子使得

(i) 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有

$$\underline{\mathcal{P}}^{\preceq}(\mathbf{M}) = \{f :\downarrow \mathbf{M} \mapsto \mathcal{P} \mid f \in \mathcal{O}_{\rm p}(\downarrow \mathbf{M}, \mathcal{P})\};$$

(ii) 如果 $\mathbf{L}, \mathbf{K} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ 满足 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{K}$, 则 $\underline{\mathcal{P}}^{\preceq}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}}) : \underline{\mathcal{P}}^{\preceq}(\mathbf{K}) \mapsto \underline{\mathcal{P}}^{\preceq}(\mathbf{L})$ 定义为, 对于任意 $f \in \underline{\mathcal{P}}^{\preceq}(\mathbf{K})$, 都有

$$\underline{\mathcal{P}}^{\preceq}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}})(f) = f|_{\mathbf{L}},$$

其中 $f|_{\mathbf{L}}$ 表示 f 在 $\downarrow \mathbf{L}$ 上的限制.

注 5.4 (1) 在上述定义中, 当 $\mathcal{P} = \mathbb{R}$ 时分别得到预层 $\underline{\mathbb{R}}^{\succeq}$ 和 $\underline{\mathbb{R}}^{\preceq}$, 它们将是我们需要的输出预层.

(2) 对于 $\mathbb{H}$ 上的一个有界自伴算子 A, 用 $\mathbb{E}(A)$ 表示 A 的期望值全体, 即

$$\mathbb{E}(A) = \{{\rm tr}(\rho A) \mid \rho \in \mathcal{L}(\mathbb{H})_{\rm sa}, \rho \geqslant 0, {\rm tr}(\rho) = 1\}.$$

它是 $\mathbb{R}$ 的一个有界子集, 按照实数序是一个偏序集. 令 $\mathcal{P} = \mathbb{E}(A)$, 则分别得到预层 $\underline{\mathbb{E}(A)}^{\succeq}$ 和 $\underline{\mathbb{E}(A)}^{\preceq}$, 它们分别是预层 $\underline{\mathbb{R}}^{\succeq}$ 和 $\underline{\mathbb{R}}^{\preceq}$ 的子对象.

命题 5.4　给定一个自伴算子 A, 令 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$.

(1) 对于任意 $\mathbf{P} \in \underline{\Sigma}(\mathbf{M})$, 定义映射 $\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P}) :\downarrow \mathbf{M} \mapsto \mathbb{E}(A)$ 为, 对于任意 $\mathbf{L} \in\downarrow \mathbf{M}$, 即 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{M}$, 都有

$$\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})(\mathbf{L}) = \underline{\Sigma}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})(\mathbf{P})(\delta^o(A)_{\mathbf{L}}).$$

则 $\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})$ 是一个反序函数, 即 $\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P}) \in \mathcal{O}_{\mathrm{r}}(\downarrow \mathbf{M}, \mathbb{E}(A))$. 故 $\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}} : \underline{\Sigma}(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{r}}(\downarrow \mathbf{M}, \mathbb{E}(A))$ 是一个态射.

(2) 对于任意 $\mathbf{P} \in \underline{\Sigma}(\mathbf{M})$, 定义映射 $\breve{\delta}^i(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P}) :\downarrow \mathbf{M} \mapsto \mathbb{E}(A)$ 为, 对于任意 $\mathbf{L} \in\downarrow \mathbf{M}$, 即 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{M}$, 都有

$$\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})(\mathbf{L}) = \underline{\Sigma}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})(\mathbf{P})(\delta^i(A)_{\mathbf{L}}).$$

则 $\breve{\delta}^i(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})$ 是一个保序函数, 即 $\breve{\delta}^i(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P}) \in \mathcal{O}_{\mathrm{p}}(\downarrow \mathbf{M}, \mathbb{E}(A))$. 故 $\breve{\delta}^i(A)_{\mathbf{M}} : \underline{\Sigma}(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{p}}(\downarrow \mathbf{M}, \mathbb{E}(A))$ 是一个态射.

证明　(1) 因为 $\underline{\Sigma}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})(\mathbf{P}) = \mathbf{P}|_{\mathbf{L}}$, 故

$$\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})(\mathbf{L}) = \mathbf{P}|_{\mathbf{L}}(\delta^o(A)_{\mathbf{L}}) = \mathbf{P}(\delta^o(A)_{\mathbf{L}}).$$

又因为当 $\mathbf{L}$ 按加细序变小时, $\delta^o(A)_{\mathbf{L}}$ 按算子序变大, 故 $\breve{\delta}^o(A)(\mathbf{P})$ 是一个反序函数.

(2) 同理,

$$\breve{\delta}^i(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})(\mathbf{L}) = \mathbf{P}|_{\mathbf{L}}(\delta^i(A)_{\mathbf{L}}) = \mathbf{P}(\delta^i(A)_{\mathbf{L}}).$$

又因为当 $\mathbf{L}$ 按加细序变小时, $\delta^i(A)_{\mathbf{L}}$ 按算子序变小, 故 $\breve{\delta}^i(A)(\mathbf{P})$ 是一个保序函数. □

定理 5.1　给定一个自伴算子 A, 则

(1) 映射族

$$\breve{\delta}^o(A) = \{\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}} : \underline{\Sigma}(\mathbf{M}) \mapsto \mathcal{O}_{\mathrm{r}}(\downarrow \mathbf{M}, \mathbb{E}(A)) \mid \mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})\}$$

是一个自然变换 $\breve{\delta}^o(A) : \underline{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{E}(A)^{\succeq}$;

(2) 映射族

$$\breve{\delta}^i(A) = \{\breve{\delta}^i(A)_{\mathbf{M}} : \underline{\Sigma}(\mathbf{M}) \mapsto \mathcal{O}_{\mathrm{p}}(\downarrow \mathbf{M}, \mathbb{E}(A)) \mid \mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})\}$$

是一个自然变换 $\breve{\delta}^i(A) : \underline{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{E}(A)^{\preceq}$.

证明　(1) 给定 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 由命题 5.4(1) 可知, $\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}$ 是从 $\underline{\Sigma}(\mathbf{M})$ 到 $\mathcal{O}_{\mathrm{r}}(\downarrow \mathbf{M}, \mathbb{E}(A))$ 的映射. 下面只需要证明, 对于任意 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{M}$, 如下图形:

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\Sigma}(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\underline{\Sigma}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})} & \underline{\Sigma}(\mathbf{L}) \\
{\scriptstyle \breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{L}}} \\
\mathbb{E}(A)^{\succeq}(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\mathbb{E}(A)^{\succeq}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})} & \mathbb{E}(A)^{\succeq}(\mathbf{L})
\end{array}$$

是交换的, 即 $\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{L}} \circ \underline{\Sigma}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}}) = \mathbb{E}(A)^{\succeq}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}}) \circ \breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}$.

为此, 设 $\mathbf{P} \in \underline{\Sigma}(\mathbf{M})$. 因为 $\underline{\Sigma}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})(\mathbf{P}) = \mathbf{P}|_{\mathbf{L}}$, 对于任意 $\mathbf{K} \in \downarrow \mathbf{L}$, 都有

$$\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{L}} \circ \underline{\Sigma}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})(\mathbf{P})(\mathbf{K}) = \breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{L}}(\mathbf{P}|_{\mathbf{L}})(\mathbf{K}) = \mathbf{P}|_{\mathbf{L}}(\mathbf{K}) = \mathbf{P}(\delta^o(A)_{\mathbf{K}}),$$
$$\mathbb{E}(A)^{\succeq}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}}) \circ \breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})(\mathbf{K}) = \breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})|_{\mathbf{L}}(\mathbf{K}) = \breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})(\mathbf{K}) = \mathbf{P}(\delta^o(A)_{\mathbf{K}}),$$

故 $\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{L}} \circ \underline{\Sigma}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})(\mathbf{P}) = \mathbb{E}(A)^{\succeq}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}}) \circ \breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})$. 因为 $\mathbf{P} \in \underline{\Sigma}(\mathbf{M})$ 是任意给定的, 因此结论得证.

同理可证 (2) 成立. □

注 5.5 因为预层 $\mathbb{E}(A)^{\succeq}$ 是预层 $\mathbb{R}^{\succeq}$ 的一个子对象, 故自然变换 $\breve{\delta}^o(A) : \underline{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{E}(A)^{\succeq}$ 可以作为一个从 $\underline{\Sigma}$ 到 $\mathbb{R}^{\succeq}$ 的自然变换. 从而, 每个自伴算子都可以由一个自然变换 $\breve{\delta}^o(A) : \underline{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{R}^{\succeq}$ 表示. 同理, 每个自伴算子都可以由一个自然变换 $\breve{\delta}^i(A) : \underline{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{R}^{\preceq}$ 表示.

定义 5.5 设 $\mathcal{P}$ 是一个偏序集. 预层 $\underline{\mathcal{P}}^{\leftrightarrow} : \mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Sets}$ 是一个函子使得

(i) 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有

$$\underline{\mathcal{P}}^{\leftrightarrow}(\mathbf{M}) = \{(f, g) : \downarrow \mathbf{M} \mapsto \mathcal{P} \mid f \in \mathcal{O}_{\mathrm{p}}(\downarrow \mathbf{M}, \mathcal{P}), g \in \mathcal{O}_{\mathrm{r}}(\downarrow \mathbf{M}, \mathcal{P})\};$$

(ii) 如果 $\mathbf{L}, \mathbf{K} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ 满足 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{K}$, 则 $\underline{\mathcal{P}}^{\leftrightarrow}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}}) : \underline{\mathcal{P}}^{\leftrightarrow}(\mathbf{K}) \mapsto \underline{\mathcal{P}}^{\leftrightarrow}(\mathbf{L})$ 定义为, 对于任意 $(f, g) \in \underline{\mathcal{P}}^{\leftrightarrow}(\mathbf{K})$, 都有

$$\underline{\mathcal{P}}^{\leftrightarrow}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}})(f, g) = (f|_{\mathbf{L}}, g|_{\mathbf{L}}),$$

其中 $f|_{\mathbf{L}}$ 和 $g|_{\mathbf{L}}$ 分别表示 f 和 g 在 $\downarrow \mathbf{L}$ 上的限制.

由定理 5.1 立即可得如下定理:

定理 5.2 给定一个自伴算子 A, 则映射族

$$\breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A) = \{(\breve{\delta}^i(A)_{\mathbf{M}}, \breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}) : \underline{\Sigma}(\mathbf{M}) \mapsto \mathbb{R}^{\leftrightarrow}(\mathbf{M}) \mid \mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})\}$$

是一个自然变换 $\breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A) : \underline{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{R}^{\leftrightarrow}$.

由定理 5.1 和 5.2, 量子智能系统 $\mathfrak{T}(\mathbb{H})$ 的输出对象 $\mathrm{Out}(\mathbb{H})$ 可以根据实际情况选取 $\mathbb{R}^{\succeq}$, $\mathbb{R}^{\preceq}$ 和 $\mathbb{R}^{\leftrightarrow}$ 三者之一.

6 量子智能系统的变换

本节研究量子智能系统的变换. 量子系统的变换由酉算子确定, 因此需要在拓扑斯 $\mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}}}$ 中给出酉算子的表示.

定义 6.1 设 U 是 $\mathbb{H}$ 上的一个酉算子, 具有谱族 $\{E^U_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. U 的外确在化 $\delta^o(U)$ 和内确在化 $\delta^i(U)$ 分别定义为, 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有

$$\delta^o(U)_{\mathbf{M}} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} d(\delta^i(E^U_\lambda)_{\mathbf{M}}),$$
$$\delta^i(U)_{\mathbf{M}} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} d\Big(\bigwedge_{\mu > \lambda} \delta^o(E^U_\mu)_{\mathbf{M}}\Big).$$

注 6.1 设 A 是一个自伴算子. 由定义可知, 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有

$$\delta^o(\mathrm{e}^{\mathrm{i}A})_{\mathbf{M}} = \mathrm{e}^{\delta^o(A)_{\mathbf{M}}}, \quad \delta^i(\mathrm{e}^{\mathrm{i}A})_{\mathbf{M}} = \mathrm{e}^{\delta^i(A)_{\mathbf{M}}}.$$

对每个 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, 用 $\mathcal{V}(\mathbf{M})_{\mathrm{u}}$ 表示 $\mathcal{V}(\mathbf{M})$ 中的酉算子全体.

定义 6.2 (1) 外 de Groote 酉预层 $\underline{O}_{\mathrm{u}}:\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}}\longrightarrow\mathbf{Sets}$ 是一个函子使得

(i) 对每个 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有 $\underline{O}_{\mathrm{u}}(\mathbf{M})=\mathcal{V}(\mathbf{M})_{\mathrm{u}}$;

(ii) 如果 $\mathbf{L},\mathbf{K}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 满足 $\mathbf{L}\leqslant\mathbf{K}$, 则 $\underline{O}_u(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}}):\underline{O}_{\mathrm{u}}(\mathbf{K})\mapsto\underline{O}_{\mathrm{u}}(\mathbf{L})$ 定义为, 对于任意 $U\in\underline{O}_u(\mathbf{K})$, 都有

$$\underline{O}_{\mathrm{u}}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}})(U)=\delta^o(U)_{\mathbf{L}}.$$

(2) 内 de Groote 酉预层 $\underline{I}_{\mathrm{u}}:\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}}\longrightarrow\mathbf{Sets}$ 是一个函子使得

(i) 对每个 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有 $\underline{I}_{\mathrm{u}}(\mathbf{M})=\mathcal{V}(\mathbf{M})_{\mathrm{u}}$;

(ii) 如果 $\mathbf{L},\mathbf{K}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 满足 $\mathbf{L}\leqslant\mathbf{K}$, 则 $\underline{I}_{\mathrm{u}}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}}):\underline{I}_{\mathrm{u}}(\mathbf{K})\mapsto\underline{I}_{\mathrm{u}}(\mathbf{L})$ 定义为, 对于任意 $U\in\underline{I}_{\mathrm{u}}(\mathbf{K})$, 都有

$$\underline{I}_{\mathrm{u}}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}})(U)=\delta^i(U)_{\mathbf{L}}.$$

命题 6.1 给定一个酉算子 U, 则映射 $\mathcal{M}(\mathbb{H})\ni\mathbf{M}\longrightarrow\delta^o(U)_{\mathbf{M}}\in\mathcal{V}(\mathbf{M})$ 确定了外 de Groote 酉预层 $\underline{O}_{\mathrm{u}}$ 的一个全局元 $\delta^o(U):1\longrightarrow\underline{O}_{\mathrm{u}}$. 同样, 映射 $\mathcal{M}(\mathbb{H})\ni\mathbf{M}\longrightarrow\delta^i(U)_{\mathbf{M}}\in\mathcal{V}(\mathbf{M})$ 确定了内 de Groote 酉预层 $\underline{I}_{\mathrm{u}}$ 的一个全局元 $\delta^i(A):1\longrightarrow\underline{I}_{\mathrm{u}}$. 特别地, 映射 $\delta^o:\mathcal{U}(\mathbb{H})\mapsto\Gamma\underline{O}_{\mathrm{u}}$ 和 $\delta^i:\mathcal{U}(\mathbb{H})\mapsto\Gamma\underline{I}_{\mathrm{u}}$ 都是单射.

证明 对于任意 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, 都有 $\delta^o(U)(\mathbf{M})=\delta^o(U)_{\mathbf{M}}\in\mathcal{V}(\mathbf{M})$; 且当 $\mathbf{L}\leqslant\mathbf{K}$ 时,

$$\underline{O}(i_{\mathbf{L},\mathbf{K}})(\delta^o(U)_{\mathbf{K}})=\delta^o(\delta^o(U)_{\mathbf{K}})_{\mathbf{L}}=\delta^o(U)_{\mathbf{L}}.$$

因此, $\delta^o(U)$ 是 $\underline{O}_{\mathrm{u}}$ 的一个全局截面. 同理可知 $\delta^i(U):1\longrightarrow\underline{I}_{\mathrm{u}}$.

如果 $\delta^o(U)=\delta^o(V)$, 其中 U 和 V 是两个酉算子, 由谱定理的唯一性可知, 对每个 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有

$$\delta^i(E^U_\lambda)_{\mathbf{M}}=\delta^i(E^V_\lambda)_{\mathbf{M}},\quad\forall\,\lambda\in\mathbb{R},$$

则由命题 4.5 可知 δ^i 是单射, 故 $E^U_\lambda=E^V_\lambda$, 即 $U=V$. 因此, 映射 $\delta^o:\mathcal{U}(\mathbb{H})\mapsto\Gamma\underline{O}_{\mathrm{u}}$ 是单射. 同理可证 $\delta^i:\mathcal{U}(\mathbb{H})\mapsto\Gamma\underline{I}_{\mathrm{u}}$ 是单射. □

给定一个酉算子 $U\in\mathcal{U}(\mathbb{H})$. 对每个 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, 令

$$\ell_U(\mathbf{M})=\{UMU^{-1}\mid M\in\mathbf{M}\},$$

则 $\ell_U(\mathbf{M})$ 是 $\mathbb{H}$ 上的一个完备测量, 即 $\ell_U(\mathbf{M})\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$. 因此, ℓ_U 是一个映射 $\ell_U:\mathcal{M}(\mathbb{H})\mapsto\mathcal{M}(\mathbb{H})$, 具有如下性质:

(1) 对每个 $U\in\mathcal{U}(\mathbb{H})$, 有 $\ell_U^{-1}=\ell_{U^{-1}}$, 且对于任意 $U_1,U_2\in\mathcal{U}(\mathbb{H})$, 都有

$$\ell_{U_1}\circ\ell_{U2}=\ell_{U_1U_2},$$

因此, 映射 $U\mapsto\ell_U$ 是酉算子群 $\mathcal{U}(\mathbb{H})$ 在 $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 上的一个表示;

(2) 如果 $\mathbf{L}\leqslant\mathbf{M}$, 则对每个 $U\in\mathcal{U}(\mathbb{H})$, 有

$$\ell_U(\mathbf{L})\leqslant\ell_U(\mathbf{M}),$$

即 ℓ_U 保持 $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ 的序, 由此可知 $\ell_U : \mathcal{M}(\mathbb{H}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{H})$ 是一个函子;

(3) 如果 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbf{M}$ 上的一个筛子, 则对每个 $U \in \mathcal{U}(\mathbb{H})$,

$$\ell_U(\mathcal{S}) = \{\ell_U(\mathbf{K}) \mid \mathbf{K} \in \mathcal{S}\}$$

是 $\ell_U(\mathbf{M})$ 上的一个筛子.

由定义立即可得如下命题.

命题 6.2 设 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ 且 $U \in \mathcal{U}(\mathbb{H})$.

(1) 对每个正交投影算子 P, 有

$$U\delta^o(P)_{\mathbf{M}}U^{-1} = \delta^o(UPU^{-1})_{\ell_U(\mathbf{M})}, \quad U\delta^i(P)_{\mathbf{M}}U^{-1} = \delta^i(UPU^{-1})_{\ell_U(\mathbf{M})};$$

(2) 对每个自伴算子算子 A, 有

$$U\delta^o(A)_{\mathbf{M}}U^{-1} = \delta^o(UAU^{-1})_{\ell_U(\mathbf{M})}, \quad U\delta^i(A)_{\mathbf{M}}U^{-1} = \delta^i(UAU^{-1})_{\ell_U(\mathbf{M})}.$$

定义 6.3 给定 $U \in \mathcal{U}(\mathbb{H})$, 态射 $\ell_U^* : \mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}}} \longrightarrow \mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}}}$ 定义为, 对于任意 $\underline{F} \in \mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}}}$, 都有

$$\ell_U^*(\underline{F}) = \underline{F} \circ \ell_U,$$

即对于任意 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 都有 $\ell_U^*(\underline{F})(\mathbf{M}) = \underline{F}(\ell_U(\mathbf{M}))$, 且对于任意 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{M}$, 都有

$$\ell_U^*(\underline{F})(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}}) = \underline{F}(i_{\ell_U(\mathbf{L}),\ell_U(\mathbf{M})}) : \underline{F}(\ell_U(\mathbf{M})) \mapsto \underline{F}(\ell_U(\mathbf{L})).$$

$\ell_U^*(\underline{F})$ 简记为 $\underline{F}^U$, 特别地, $\underline{\Sigma}^U = \ell_U^*(\underline{\Sigma})$, $(\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow})^U = \ell_U^*(\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow})$.

命题 6.3 对于任意 $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(\mathbb{H})$, 都有

$$\ell_{U_1U_2}^* = \ell_{U_2}^* \circ \ell_{U_1}^*.$$

因此, 映射 $U \mapsto \ell_U^*$ 是由 $\mathbf{Sets}^{\mathcal{M}(\mathbb{H})^{\mathrm{op}}}$ 上态射给出的 $\mathcal{U}(\mathbb{H})$ 的一个反表示 (anti-representation).

证明 给定一个预层 $\underline{F}$ 和两个酉算子 U_1 和 U_2, 因为对于任意 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 都有

$$\ell_{U_1}^*(\underline{F})(\mathbf{M}) = \underline{F}(\ell_{U_1}(\mathbf{M})),$$

所以

$$\ell_{U_2}^*(\ell_{U_1}^*(\underline{F}))(\mathbf{M}) = \ell_{U_1}^*(\underline{F})(\ell_{U_2}(\mathbf{M})) = \underline{F}(\ell_{U_1}(\ell_{U_2}(\mathbf{M}))) = \underline{F}(\ell_{U_1U_2}(\mathbf{M})) = \ell_{U_1U_2}^*(\underline{F})(\mathbf{M}).$$

故得结论. □

命题 6.4 给定一个酉算子 U, 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$ 定义映射 $\iota_{\mathbf{M}}^U : \underline{\Sigma}(\mathbf{M}) \mapsto \underline{\Sigma}(\ell_U(\mathbf{M}))$ 为, 对于任意 $\mathbf{P} \in \underline{\Sigma}(\mathbf{M})$, 都有

$$\iota_{\mathbf{M}}^U(\mathbf{P})(Q) = \mathbf{P}(U^{-1}QU), \quad \forall\, Q \in \mathcal{B}(\ell_U(\mathbf{M})).$$

则映射族

$$\iota^U = \{\iota_{\mathbf{M}}^U : \underline{\Sigma}(\mathbf{M}) \mapsto \underline{\Sigma}(\ell_U(\mathbf{M})) \mid \mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})\}$$

是一个自然同构 $\iota^U:\underline{\Sigma}\longrightarrow\underline{\Sigma}^U$, 即对任意 $\mathbf{L}\leqslant\mathbf{M}$, 如下图形:

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\Sigma}(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\underline{\Sigma}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})} & \underline{\Sigma}(\mathbf{L}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \iota^U_{\mathbf{M}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \iota^U_{\mathbf{L}}} \\
\underline{\Sigma}^U(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\underline{\Sigma}^U(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})} & \underline{\Sigma}^U(\mathbf{L})
\end{array}$$

是交换的.

证明　因为对于任意 $Q\in\mathcal{B}(\ell_U(\mathbf{M}))$, 都有 $U^{-1}QU\in\mathcal{B}(\mathbf{M})$, 故 $\iota^U_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})(Q)$ 的定义有意义. 当 $\{Q_k\}\subset\mathcal{B}(\ell_U(\mathbf{M}))$ 为一列两两正交的投影算子时, $\{U^{-1}Q_kU\}$ 是 $\mathcal{B}(\mathbf{M})$ 中一列两两正交的投影算子, 由此可知 $\iota^U_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})$ 是可列可加的, 即 $\iota^U_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})\in\underline{\Sigma}(\ell_U(\mathbf{M}))$. 由于 U 是可逆算子, 故 $\iota^U_{\mathbf{M}}:\underline{\Sigma}(\mathbf{M})\mapsto\underline{\Sigma}(\ell_U(\mathbf{M}))$ 是 1-1 映射. 交换图由定义可得. 因此, $\iota^U:\underline{\Sigma}\longrightarrow\underline{\Sigma}^U$ 是一个自然同构.　□

命题 6.5　给定一个酉算子 U.

(1) 对每个 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, 定义映射 $\kappa^{\succeq}_U(\mathbf{M}):\underline{\mathbb{R}}^{\succeq}(\mathbf{M})\mapsto(\underline{\mathbb{R}}^{\succeq})^U(\mathbf{M})$ 为, 对于任意 $f\in\mathcal{Q}_{\mathrm{r}}(\downarrow\mathbf{M},\mathbb{R})$, 都有

$$\kappa^{\succeq}_U(\mathbf{M})(f)(\ell_U(\mathbf{L}))=f(\mathbf{L}),\quad\forall\,\mathbf{L}\in\downarrow\mathbf{M},$$

则映射族

$$\kappa^{\succeq}_U=\{\kappa^{\succeq}_U(\mathbf{M}):\underline{\mathbb{R}}^{\succeq}(\mathbf{M})\mapsto(\underline{\mathbb{R}}^{\succeq})^U(\mathbf{M})\mid\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})\}$$

是一个自然同构 $\kappa^{\succeq}_U:\underline{\mathbb{R}}^{\succeq}\longrightarrow(\underline{\mathbb{R}}^{\succeq})^U$;

(2) 对每个 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, 定义映射 $\kappa^{\preceq}_U(\mathbf{M}):\underline{\mathbb{R}}^{\preceq}(\mathbf{M})\mapsto(\underline{\mathbb{R}}^{\preceq})^U(\mathbf{M})$ 为, 对于任意 $f\in\mathcal{Q}_{\mathrm{p}}(\downarrow\mathbf{M},\mathbb{R})$, 都有

$$\kappa^{\preceq}_U(\mathbf{M})(f)(\ell_U(\mathbf{L}))=f(\mathbf{L}),\quad\forall\,\mathbf{L}\in\downarrow\mathbf{M},$$

则映射族

$$\kappa^{\preceq}_U=\{\kappa^{\preceq}_U(\mathbf{M}):\underline{\mathbb{R}}^{\preceq}(\mathbf{M})\mapsto(\underline{\mathbb{R}}^{\preceq})^U(\mathbf{M})\mid\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})\}$$

是一个自然同构 $\kappa^{\preceq}_U:\underline{\mathbb{R}}^{\preceq}\longrightarrow(\underline{\mathbb{R}}^{\preceq})^U$;

(3) 对每个 $\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})$, 定义映射 $\kappa^{\leftrightarrow}_U(\mathbf{M}):\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow}(\mathbf{M})\mapsto(\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow})^U(\mathbf{M})$ 为, 对于任意 $f\in\mathcal{Q}_{\mathrm{p}}(\downarrow\mathbf{M},\mathbb{R})$, $g\in\mathcal{Q}_{\mathrm{r}}(\downarrow\mathbf{M},\mathbb{R})$, 都有

$$\kappa^{\leftrightarrow}_U(\mathbf{M})(f,g)(\ell_U(\mathbf{L}))=(f(\mathbf{L}),g(\mathbf{L})),\quad\forall\,\mathbf{L}\in\downarrow\mathbf{M},$$

则映射族

$$\kappa^{\leftrightarrow}_U=\{\kappa^{\leftrightarrow}_U(\mathbf{M}):\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow}(\mathbf{M})\mapsto(\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow})^U(\mathbf{M})\mid\mathbf{M}\in\mathcal{M}(\mathbb{H})\}$$

是一个自然同构 $\kappa^{\leftrightarrow}_U:\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow}\longrightarrow(\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow})^U$, 即对任意 $\mathbf{L}\leqslant\mathbf{M}$, 如下图形:

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow}(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})} & \underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow}(\mathbf{L}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \kappa^{\leftrightarrow}_U(\mathbf{M})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \kappa^{\leftrightarrow}_U(\mathbf{L})} \\
(\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow})^U(\mathbf{M}) & \xrightarrow{(\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow})^U(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})} & (\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow})^U(\mathbf{L})
\end{array}$$

是交换的.

证明 下面只证明 (3). 因为对于任意 $\mathbf{L} \in\downarrow \mathbf{M}$, 都有 $\ell_U(\mathbf{L}) \in\downarrow \ell_U(\mathbf{M})$, 故 $\kappa_U^{\leftrightarrow}(\mathbf{M})(f,g)(\ell_U(\mathbf{L}))$ 的定义有意义. 由定义 5.5 直接验证可知, $\kappa_U^{\leftrightarrow}(\mathbf{M}) : \underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow}(\mathbf{M}) \mapsto (\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow})^U(\mathbf{M})$ 是一个态射. 因为 U 是可逆算子, 故 $\kappa_U^{\leftrightarrow} : \underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow} \longrightarrow (\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow})^U$ 是一个自然同构. □

由定理 5.1 和 5.2 以及命题 6.4 和 6.5 可得如下结果.

定理 6.1 给定 $\mathbb{H}$ 上的酉算子 U 和自伴算子 A, 则

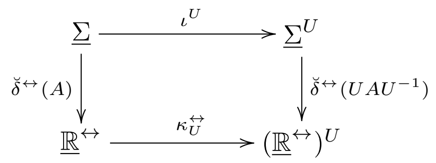
$$\kappa_U^{\succeq} \circ \breve{\delta}^o(A) = \breve{\delta}^o(UAU^{-1}) \circ \iota^U, \tag{6.1}$$

$$\kappa_U^{\preceq} \circ \breve{\delta}^i(A) = \breve{\delta}^i(UAU^{-1}) \circ \iota^U \tag{6.2}$$

和

$$\kappa_U^{\leftrightarrow} \circ \breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A) = \breve{\delta}^{\leftrightarrow}(UAU^{-1}) \circ \iota^U, \tag{6.3}$$

即如下图形:



是交换的.

证明 下面只证明 (6.1). 由命题 5.4 知, 给定 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 对于任意 $\mathbf{P} \in \underline{\Sigma}(\mathbf{M})$, 都有 $\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P}) \in \underline{\mathbb{R}}^{\succeq}(\mathbf{M})$, 即

$$\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})(\mathbf{L}) = \mathbf{P}(\delta^o(A)_{\mathbf{L}}), \quad \forall\, \mathbf{L} \leqslant \mathbf{M}.$$

则由命题 6.5(1) 有

$$\kappa_U^{\succeq}(\mathbf{M})(\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P}))(\ell_U(\mathbf{L})) = \breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})(\mathbf{L}) = \mathbf{P}(\delta^o(A)_{\mathbf{L}}), \quad \forall\, \mathbf{L} \in\downarrow \mathbf{M};$$

由命题 6.4 有

$$\iota_{\mathbf{M}}^U(\mathbf{P})(\ell_U(Q)) = \mathbf{P}(Q), \quad \forall\, Q \in \mathcal{B}(\mathbf{M}).$$

令 $Q = \delta^o(A)_{\mathbf{L}}$, 可得

$$\iota_{\mathbf{M}}^U(\mathbf{P})(\ell_U(\delta^o(A)_{\mathbf{L}})) = \mathbf{P}(\delta^o(A)_{\mathbf{L}}) = \kappa_U^{\succeq}(\mathbf{M})(\breve{\delta}^o(A)_{\mathbf{M}}(\mathbf{P}))(\ell_U(\mathbf{L})).$$

由于

$$\iota_{\mathbf{M}}^U(\mathbf{P})(\ell_U(\delta^o(A)_{\mathbf{L}})) = \iota_{\mathbf{M}}^U(\mathbf{P})(\delta^o(UAU^{-1})_{\ell_U(\mathbf{L})}) = \breve{\delta}^o(UAU^{-1})_{\mathbf{M}}(\iota_{\mathbf{M}}^U(\mathbf{P}))(\ell_U(\mathbf{L})),$$

且 $\mathbf{P} \in \underline{\Sigma}(\mathbf{M})$ 是任意给定的, 故 (6.1) 成立. 同理可证 (6.2) 和 (6.3). □

因为 $\iota^U : \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Sigma}^U$ 和 $\kappa_U^{\leftrightarrow} : \underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow} \longrightarrow (\underline{\mathbb{R}}^{\leftrightarrow})^U$ 都是自然同构, 故

$$\breve{\delta}^{\leftrightarrow}(UAU^{-1}) = \kappa_U^{\leftrightarrow} \circ \breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A) \circ (\iota^U)^{-1},$$

$$\breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A) = (\kappa_U^{\leftrightarrow})^{-1} \circ \breve{\delta}^{\leftrightarrow}(UAU^{-1}) \circ \iota^U.$$

对 $\breve{\delta}^o(UAU^{-1})$ 和 $\breve{\delta}^i(UAU^{-1})$ 也有类似的结论.

7 量子神经网络的拓扑斯模型

本节用量子人工智能系统的拓扑斯理论描述量子神经网络, 关于量子神经网络的研究进展参见文献 [1, 12, 24] 等及其所引文献. 下面首先给出在量子人工智能系统中编码数据的拟态和拟态在酉算子作用下的自然同构, 然后给出量子神经网络在量子人工智能系统中的拓扑斯表示.

在量子神经网络中, 数据编码在量子态上 (参见文献 [23, 24]). 在量子人工智能系统中, 一个自然的想法是将数据编码到输入对象 $\underline{\Sigma}$ 的全局元上. 可是, $\underline{\Sigma}$ 没有全局元 (参见文献 [16]). 但是在文献 [11] 中已经证明, 每个量子态 $|\psi\rangle$ 确定的真值可以用 $\underline{\Sigma}$ 的子对象 $\underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle}$ 表示, 其中 $\underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle}$ 定义如下: 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有

$$\underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle}(\mathbf{M}) = \{\mathbf{P} \in \underline{\Sigma}(\mathbf{M}) \mid \mathbf{P}(\delta^o(|\psi\rangle\langle\psi|)_{\mathbf{M}}) = 1\}, \tag{7.1}$$

它称为对应于量子态 $|\psi\rangle$ 的拟态 (pseudo-state). 由性质 4.6 可知 $\underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle} = \underline{\delta^o(|\psi\rangle\langle\psi|)}$, 它是量子命题 $|\psi\rangle\langle\psi|$ 在量子智能系统中的表示. 在文献 [11] 中, 语句 $\underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle} \subseteq \underline{\delta^o(P)}$ 的赋值定义为, 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有

$$\nu(\underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle} \subseteq \underline{\delta^o(P)})(\mathbf{M}) = \{\mathbf{L} \in \downarrow \mathbf{M} \mid \delta^o(|\psi\rangle\langle\psi|)_{\mathbf{L}} \leqslant \delta^o(P)_{\mathbf{L}}\},$$

等式右手边是 $\mathbf{M}$ 上的一个筛子. 因此, $\nu(\underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle} \subseteq \underline{\delta^o(P)}) : 1 \longrightarrow \Omega$ 是子对象分类子 Ω 的一个全局元. 故在量子人工智能系统中, 可以用拟态 $\underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle}$ 编码数据.

考虑观测量在拟态 $\underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle}$ 上的取值问题. 由定理 5.2 可知, 自伴算子 A 由一个自然变换 $\breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A) : \underline{\Sigma} \longrightarrow \mathbb{R}^{\leftrightarrow}$ 表示, 因此态射

$$\breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A)(\underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle}) : \underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle} \longrightarrow \underline{\Sigma} \xrightarrow{\breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A)} \mathbb{R}^{\leftrightarrow}$$

是观测量 A 在量子态 $|\psi\rangle$ 上的取值的拓扑斯表示. 因为在文献 [11, (13.277)] 中已经证明, $\breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A)(\underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle})$ 是 $\mathbb{R}^{\leftrightarrow}$ 的子对象, 故该取值是有意义的.

为了用拓扑斯理论表示量子神经网络, 需要考虑拟态在量子操作 (酉算子作用) 下的变换形式.

定义 7.1 给定一个酉算子 $U \in \mathcal{U}(\mathbb{H})$, 预层 $\underline{\mathbf{m}}^U_{U|\psi\rangle}$ 定义为, 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有

$$\underline{\mathbf{m}}^U_{U|\psi\rangle}(\mathbf{M}) = \underline{\mathbf{m}}_{U|\psi\rangle}(\ell_U(\mathbf{M})).$$

特别地, 当 $U = I$ 时, $\underline{\mathbf{m}}^I_{I|\psi\rangle} = \underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle}$.

由定义 6.3 可知 $\underline{\mathbf{m}}^U_{U|\psi\rangle} = \ell^*_U(\underline{\mathbf{m}}_{U|\psi\rangle})$. 因此, $\underline{\mathbf{m}}^U_{U|\psi\rangle}$ 是 $\underline{\Sigma}^U$ 的子对象.

命题 7.1 给定酉算子 $U, V \in \mathcal{U}(\mathbb{H})$, 对于任意 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 定义映射 $\alpha^{U,V}_{\mathbf{M}} : \underline{\mathbf{m}}^V_{V|\psi\rangle}(\mathbf{M}) \mapsto \underline{\mathbf{m}}^{UV}_{UV|\psi\rangle}(\mathbf{M})$ 为, 对每个 $\mathbf{P} \in \underline{\mathbf{m}}^V_{V|\psi\rangle}(\mathbf{M})$, 有

$$\alpha^{U,V}_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})(Q) = \mathbf{P}(U^{-1}QU), \quad \forall\, Q \in \mathcal{B}(\ell_{UV}(\mathbf{M})),$$

则 $\alpha^{U,V}_{\mathbf{M}}$ 是一个 1-1 映射, 从而 $\alpha^{U,V} = \{\alpha^{U,V}_{\mathbf{M}} \mid \mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})\} : \underline{\mathbf{m}}^V_{V|\psi\rangle} \longrightarrow \underline{\mathbf{m}}^{UV}_{UV|\psi\rangle}$ 是一个自然同构. 特别地, $\alpha^{U,I} = \{\alpha^{U,I}_{\mathbf{M}} \mid \mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})\} : \underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle} \longrightarrow \underline{\mathbf{m}}^U_{U|\psi\rangle}$ 是一个自然同构.

证明 给定 $\mathbf{P} \in \underline{\mathbf{m}}^V_{V|\psi\rangle}(\mathbf{M})$, 由定义可知

$$\begin{aligned}\alpha^{U,V}_{\mathbf{M}}(\mathbf{P})(\delta^o(|UV\psi\rangle\langle UV\psi|)_{\ell_{UV}(\mathbf{M})}) &= \mathbf{P}(U^{-1}\delta^o(U|V\psi\rangle\langle V\psi|U^{-1})_{\ell_U(\ell_V(\mathbf{M}))}U) \\ &= \mathbf{P}(\delta^o(|V\psi\rangle\langle V\psi|)_{\ell_V(\mathbf{M})}) = 1,\end{aligned}$$

因此, $\alpha^{U,V}_{\mathbf{M}}(\mathbf{P}) \in \underline{\mathbf{m}}^{UV}_{UV|\psi\rangle}(\mathbf{M})$. 因为 U 是可逆算子, 故 $\alpha^{U,V}_{\mathbf{M}}$ 是 1-1 映射.

对于任意 $\mathbf{L} \leqslant \mathbf{M}$, 由定义直接验证可知, 如下图形:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{m}}^{V}_{V|\psi\rangle}(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\underline{\mathbf{m}}^{V}_{V|\psi\rangle}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})} & \underline{\mathbf{m}}^{V}_{V|\psi\rangle}(\mathbf{L}) \\ {\scriptstyle \alpha^{U,V}_{\mathbf{M}}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha^{U,V}_{\mathbf{L}}} \\ \underline{\mathbf{m}}^{UV}_{UV|\psi\rangle}(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\underline{\mathbf{m}}^{UV}_{UV|\psi\rangle}(i_{\mathbf{L},\mathbf{M}})} & \underline{\mathbf{m}}^{UV}_{UV|\psi\rangle}(\mathbf{L}) \end{array}$$

是交换的. 故 $\alpha^{U,V} = \{\alpha^{U,V}_{\mathbf{M}} \mid \mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})\}$ 是一个自然同构. □

注 7.1 因为 $\underline{\mathbf{m}}_{U|\psi\rangle}$ 是 $\underline{\Sigma}$ 的子对象, 似乎考虑从 $\underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle}$ 到 $\underline{\mathbf{m}}_{U|\psi\rangle}$ 的变换是合理的. 但这是行不通的, 因为一般不存在从 $\underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle}$ 到 $\underline{\mathbf{m}}_{U|\psi\rangle}$ 的自然变换. 同理, 也不能考虑从 $\underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle}$ 到 $\ell^*_U(\underline{\mathbf{m}}_{|\psi\rangle})$ 的变换.

定义 7.2 给定一个酉算子 $U \in \mathcal{U}(\mathbb{H})$ 和一个自伴算子 A, 自然变换 $\breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A)^U : \underline{\Sigma}^U \longrightarrow (\mathbb{R}^{\leftrightarrow})^U$ 定义为, 对每个 $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$, 有

$$\breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A)^U(\mathbf{M}) = \breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A)(\ell_U(\mathbf{M})).$$

特别地, 当 $U = I$ 时, $\breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A)^I = \breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A)$.

注 7.2 注意, $\breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A)^U \neq \breve{\delta}^{\leftrightarrow}(UAU^{-1})$. 在 $U|\psi\rangle$ 上测量 A 由态射

$$\breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A)^U(\underline{\mathbf{m}}^U_{U|\psi\rangle}) : \underline{\mathbf{m}}^U_{U|\psi\rangle} \longrightarrow \underline{\Sigma}^U \xrightarrow{\breve{\delta}^{\leftrightarrow}(A)^U} (\mathbb{R}^{\leftrightarrow})^U$$

表示, 它是观测量 A 在量子态 $U|\psi\rangle$ 上的取值的拓扑斯表示.

下面用上述拓扑斯理论描述量子神经网络. 一个 L- 层量子神经网络是一个形如 $U = U^{\mathrm{out}}U^L \cdots U^1$ 的量子线路模型 (参见文献 [1,24]), 其中 U^ℓ 是第 ℓ 次量子操作, 它将第 $\ell-1$ 层的量子比特映射到第 ℓ 层的量子比特. 如果它的初始态是 $\rho^{\mathrm{in}} = |0\rangle^{\otimes n}$, 则经过 $L+1$ 次量子操作后得到量子态 $U\rho^{\mathrm{in}}$. 按照上述拓扑斯描述, 由命题 7.1 可知, 这个量子操作过程可以用态射描述如下:

$$\alpha^{U,I} = \alpha^{U^{\mathrm{out}},U^L\cdots U^1} \circ \cdots \circ \alpha^{U^1,I},$$

其中 $\alpha^{U^1,I}, \ldots, \alpha^{U^{\mathrm{out}},U^L\cdots U^1}$ 都是自然同构, 即如下图形:

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{\mathbf{m}}_{|0\rangle^{\otimes n}} & \xrightarrow{\alpha^{U^1,I}} & \underline{\mathbf{m}}^{U_1}_{U_1|0\rangle^{\otimes n}} & \xrightarrow{\alpha^{U^2,U^1}} & \cdots & \xrightarrow{\alpha^{U^L,U^{L-1}\cdots U^1}} & \underline{\mathbf{m}}^{U^L\cdots U^1}_{U^L\cdots U^1|0\rangle^{\otimes n}} \\ & & & {\scriptstyle \alpha^{U,I}}\searrow & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha^{U^{\mathrm{out}},U^L\cdots U^1}} \\ & & & & & & \underline{\mathbf{m}}^{U}_{U|0\rangle^{\otimes n}} \end{array}$$

是交换的. 当然, $U^1, \ldots, U^L, U^{\mathrm{out}}$ 需要根据实际问题作不同的选取.

一个具体的简单例子是, 可以将 Deutsch-Jozsa 量子算法 (参见文献 [15]) 看作一个 2- 层量子神经网络 $U = U^{\mathrm{out}}U^2U^1$, 其中

$$U^1 = H^{\otimes(n+1)}, \quad U^2 = U_f, \quad U^{\mathrm{out}} = H^{\otimes n} \otimes I_2,$$

而 H 和 I_2 是 $\mathbb{C}^2$ 上的 Hardamard 变换和单位算子. 这个量子神经网络的拓扑斯表示如下:

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\mathbf{m}}_{|0\rangle^{\otimes(n+1)}} & \xrightarrow{\alpha^{U^1,I}} & \underline{\mathbf{m}}^{U^1}_{U^1|0\rangle^{\otimes(n+1)}} & \xrightarrow{\alpha^{U_f,U^1}} & \underline{\mathbf{m}}^{U_fU^1}_{U_fU^1|0\rangle^{\otimes(n+1)}} \\ & \searrow{\scriptstyle \alpha^{U,I}} & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{U^{\mathrm{out}},U_fU^1}} \\ & & & & \underline{\mathbf{m}}^{U}_{U|0\rangle^{\otimes(n+1)}}. \end{array}$$

上面研究了用拓扑斯理论表示量子神经网络的问题, 而没有考虑如何训练的问题 (参见文献 [12]). 由此也可以考虑用上述拓扑斯理论模型描述量子 Boltzmann 机 (参见文献 [24]) 和耗散型量子神经网络 (参见文献 [25]) 等. 同理, 还可以用上述拓扑斯理论模型描述量子计算 (参见文献 [3]). 这些问题有待进一步研究.

致谢 陈泽乾感谢哈尔滨工业大学数学研究院许全华教授、中国科学院数学与系统科学研究院骆顺龙研究员和浙江大学数学科学学院武俊德教授对他在量子人工智能方面研究工作的大力支持和鼓励, 本文内容曾在他们主持的讨论班与研讨会上报告, 得到了他们的指导和帮助. 作者们感谢审稿人提出有益的修改意见.

参考文献

1 Beer K, Bondarenko D, Farrelly T, et al. Training deep quantum neural networks. Nat Commun, 2020, 11: 808
2 Belfiore J C, Bennequin D. Topos and stacks of deep neural networks. arXiv:2106.14587, 2021
3 Chen Z Q. Observable-geometric phases and quantum computation. Internat J Theoret Phys, 2020, 59: 1255–1276
4 Chen Z Q. A mathematical formalism of non-Hermitian quantum mechanics and observable-geometric phases. arXiv:2111.12883, 2021
5 Chen Z Q. Turing's thinking machine and ′t Hooft's principle of superposition of states. ChinaXiv:202405.00127, 2024
6 Dirac P A M. The Principles of Quantum Mechanics, 4th ed. London: Oxford Univ Press, 1958
7 Döring A, Isham C J. A topos foundation for theories of physics: I. Formal languages for physics. J Math Phys, 2008, 49: 053515
8 Döring A, Isham C J. A topos foundation for theories of physics: II. Daseinisation and the liberation of quantum theory. J Math Phys, 2008, 49: 053516
9 Döring A, Isham C J. A topos foundation for theories of physics: III. The representation of physical quantities with arrows $\breve{\delta}^o(A):\Sigma\longrightarrow\mathbb{R}^{\succeq}$. J Math Phys, 2008, 49: 053517
10 Döring A, Isham C J. A topos foundation for theories of physics: IV. Categories of systems. J Math Phys, 2008, 49: 053518
11 Döring A, Isham C J. "What is a thing?": Topos theory in the foundations of physics. In: New Structures for Physics. Lecture Notes in Physics, vol. 813. Berlin-Heidelberg: Springer, 2011, 753–937
12 Dunjko V, Briegel H J. Machine learning & artificial intelligence in the quantum domain: A review of recent progress. Rep Progr Phys, 2018, 81: 074001
13 Goldblatt R. Topoi: The Categorical Analysis of Logic. London: North-Holland, 1984
14 Goodfellow I, Bengio Y, Courville A. Deep Learning. New York: MIT Press, 2016
15 Gudder S. Quantum computation. Amer Math Monthly, 2003, 110: 181–201
16 Isham C J, Butterfield J. Topos perspective on the Kochen-Specker theorem: I. Quantum states as generalized valuations. Internat J Theoret Phys, 1998, 37: 2669–2733
17 Lambek J, Scott P J. Introduction to Higher Order Categorical Logic. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1986
18 Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician. New York: Springer-Verlag, 1998
19 Mac Lane S, Moerdijk I. Sheaves in Geometry and Logic. A First Introduction to Topos Theory. Berlin: Springer, 1992
20 Reed M, Simon B. Method of Modern Mathematical Physics, Volume I. San Diego: Academic Press, 1980
21 Reed M, Simon B. Method of Modern Mathematical Physics, Volume II. Cambridge: Academic Press, 1980
22 Rudin W. Functional Analysis, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1991
23 Schuld M, Killoran N. Quantum machine learning in feature Hilbert spaces. Phys Rev Lett, 2018, 122: 040504
24 Schuld M, Petruccione F. Machine Learning with Quantum Computers, 2nd ed. Berlin-Heidelberg: Springer, 2021
25 Sharma K, Cerezo M, Cincio L, et al. Trainability of dissipative perceptron-based quantum neural networks. Phys Rev Lett, 2022, 128: 180505

26 ′t Hooft G. The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics. Berlin: Springer, 2016
27 Turing A. Computing machinery and intelligence. Mind, 1950, 59: 433–460
28 Varadarajan V S. Geometry of Quantum Theory, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1985

A topos-theoretic formalism of quantum artificial intelligence

Zeqian Chen, Lixin Ding, Hongmei Liu & Jinghu Yu

Abstract Based on ′t Hooft's principle of superposition of states beyond the usual one as described by Dirac in the conventional quantum mechanics, we present a topos-theoretic formalism of quantum artificial intelligence. At first, according to Turing test, we interpret an artificial intelligence (AI) system as a physical system described by a topos (which is a new physical theory built by Isham et al. in 2008). Secondly, by using measure theory, we construct a topos-theoretic model for a classical AI system such as deep learning, while we construct a topos-theoretic model for a quantum AI system by operator theory. Finally, we give the topos-theoretic description of a quantum neural network.

Keywords Turing's thinking machine, ′t Hooft's principle of superposition of states, quantum artificial intelligence, topos theory, operator theory, quantum neural network

MSC(2020) 68T27, 81P10, 46L53

doi: 10.1360/SSM-2024-0126